

大同工業大学大学院 学生員 ○ 高木信治

大同工業大学工学部 正会員 水澤富作

1. はじめに 板厚が増大するにつれて、薄板理論では無視される表面荷重の影響、厚さ方向の応力の非線形分布や境界条件などの影響が大きく現れてくる。したがって、厚板のような弾性体の正確な応力状態や変位状態を知るには、3次元弾性理論を用いる必要がある。これまでに、厚板の応力解析の研究として、周辺単純支持板に対するSrinivasら¹⁾、奥村ら²⁾や園田ら³⁾の厳密解法、周辺固定板の曲げ解析への基本解と選点法を適用した島田らの研究⁴⁾、有限プリズム法を用いたZienkiewiczらの研究⁵⁾や節点プリズム法を用いた林らの研究⁶⁾などがある。しかしながら、境界面近傍での応力値の信頼性や未知数の増大などに問題が見受けられる。また、有限要素解を評価するためにもさらに信頼性の高い解析手法が必要であると思われる。

本研究では、先に厚板の振動解析のために提案したSpline Prism法⁷⁾を用いて、等方性な長方形厚板の応力解析を行い、その応力分布特性に与える板厚比や辺長比などの影響について検討する。

2. 解析方法 Spline Prism法は、図-1に示すようなプリズム要素で離散化し、プリズム要素内で2方向にB-spline関数を仮定し、他の一方向に仮定した固有関数の直交性を利用して3次元問題を2次元問題に変換した半数値解析法である。式の定式化にあたり、次式で表される無次元座標系を用いる。

$$\xi = X/a, \quad \eta = Y/b, \quad \zeta = Z/L \quad (1)$$

各プリズム要素におけるX, Y, Z方向の変位関数, U, V, Wは次式(2)で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^r [N]_{mn} Z_i(\xi) \{\delta_A\}_i \\ V &= \sum_{i=1}^r [N]_{mn} Z_i(\xi) \{\delta_B\}_i \\ W &= \sum_{i=1}^r [N]_{mn} \bar{Z}_i(\xi) \{\delta_C\}_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

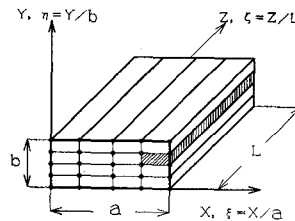


図-1 プリズムモデルと座標系

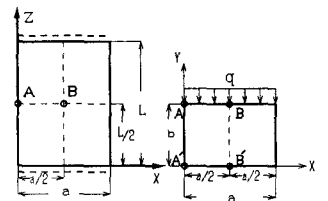


図-2 解析モデル

ここで, $[N]_{mn} = [N_{1,k}(\xi)N_{1,k}(\eta), N_{1,k}(\xi)N_{2,k}(\eta), \dots, N_{i_x,k}(\xi)N_{i_y,k}(\eta)]$

$\{\delta_A\}_i = \{A_{11}, A_{12}, \dots, A_{i_x i_y}\}_i^T$, $\{\delta_B\}_i = \{B_{11}, B_{12}, \dots, B_{i_x i_y}\}_i^T$,

$\{\delta_C\}_i = \{C_{11}, C_{12}, \dots, C_{i_x i_y}\}_i^T$ である。また, $Z_i(\xi) = \sin(i\pi\xi)$, $\bar{Z}_i(\xi) = \cos(i\pi\xi)$

であり, $i_x = k-1+M_x$, $i_y = k-1+M_y$ である。 $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は、正規化されたB-spline関数であり、 $k-1$ はB-spline関数のSpline次数、 M_x と M_y はそれぞれxとy方向のプリズム要素の分割数である。また、rは固有関数の級数の項数である。また、厚板の全ポテンシャルエネルギー(汎関数)は、次式で与えられる。

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V (q_u u + q_v v + q_w w) dV \quad \dots (3)$$

ここで $\{\epsilon\} = \{\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\}^T$, $\{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}^T$, またqは長方形厚板に荷重する荷重である。したがって、式(2)を上式に代入し、汎関数を最小化すれば剛性方程式が誘導できる。

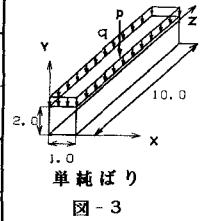
3. 数値計算例及び考察 本手法を用いて、相対する2辺が単純支持され他の2辺で任意の境界条件をもつ長方形厚板の応力解析を行い、解の精度などの数値安定性について検討する。また、表面荷重を受ける長方形厚板の応力分布に与える板厚比, b/a や辺長比, L/a の影響について示す。なお、本手法の収束性を調べるために、スプライン次数、級数の項数やプリズム要素数を変化させてみたが、級数は11項で応力値が収束し、また、板厚が薄い場合には、プリズム要素を多くするよりもスプライン次数を高めると早く収束している。表-1では、図-3に示すような、等分布荷重, qおよび集中荷重, pを受ける単純ばりの応力の精度比較が示してある。

ここで、FPM⁸⁾は16分割された12節点のアイソラメトリック⁷⁾要素を用いた有限⁷⁾要素の解である。また、二次元弾性理論に基づく厳密解も示してある。

これらの値と比較して、よく一致した結果が示されている。図4-a), b)には、図-2に示された等分布荷重を受ける相対する2辺が固定された正方形厚板($\nu=0.3$)の中央断面($\zeta=0.5$)での応力分布、 σ_z に与える板厚比の影響が示されている。ここで、板厚比、 b/a は0.1, 0.4, 1.0に変化させている。なお、図-4 a)は固定点、b)は中央点の応力分布図である。

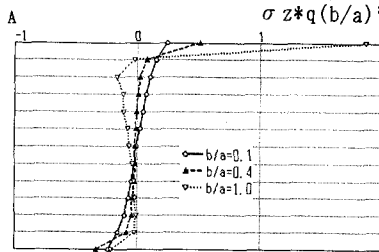
表-1 梁の応力の精度比較
E=10.0 z=10.0 k-1=3 p=100.0
 $\nu=0.25$ a=1.0 Mx=My=2 q=1.0
b=2.0 r=11

荷重	応力	Y	Present Method	F.P.M 8)	Beam Theory 8)
q	σ_z	2.0	-18.99	-18.102	-18.95
		1.0	0.0	0.001	0.0
		0.0	18.96	18.101	18.95
σ_y		2.0	-1.029	-0.976	-1.000
		1.0	0.500	0.506	0.500
		0.0	0.0	0.013	0.0
P	σ_z	2.0	-2421.0	-1059.7	-
		1.0	11.00	13.56	12.1
		0.0	361.6	354.1	361.7
σ_y		2.0	-3558.1	-1529.0	-
		1.0	50.85	48.11	-45.60
		0.0	0.0	0.394	0.0

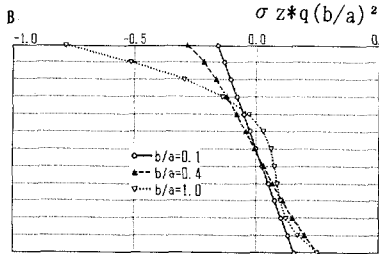


厚が増大すると非線形な分布形状になり、表面荷重の影響で非対称な分布が示されている。また、載荷面近傍での応力が急激に変化しているが、板厚の減少とともに線形分布に近づいてくる。しかしながら、固定辺では板厚比が小さい場合でも非線形な応力分布形状を示している。

図5-a), b)は、等分布荷重を受ける相対する2辺が自由な長方形厚板($b/a=1.0$, $\nu=0.3$)の応力分布、 σ_x , σ_z に与える辺長比の影響を示す。ここで、辺長比は $L/a=0.5, 1.0, 2.0$ にと



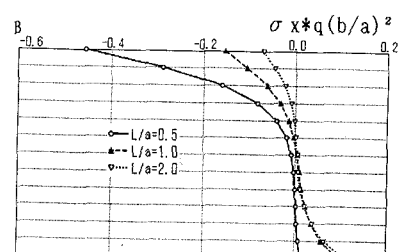
a) 固定点 (図-2のA-A')



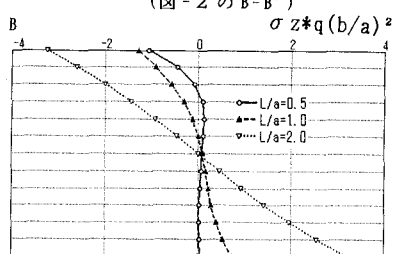
b) 中央 (図-2のB-B')

図-4 正方形板の応力分布、 σ_z に与える幅厚比の影響

L/a = 1.0 k-1 = 3
b/a = 0.1, 0.4, 1.0 Mx=My=12
 $\nu=0.3$ r=11



a) σ_x の応力分布図 (図-2のB-B')



b) σ_z の応力分布図 (図-2のB-B')

図-5 長方形板の応力分布、 σ_x , σ_z に与える辺長比の影響

L/a = 0.5, 1.0, 2.0 k-1 = 3
b/a = 1.0 Mx=My=12
 $\nu=0.3$ r=11

っている。これより、辺長比が小さくなると、 σ_x の分布が非線形な形状になり、また辺長比が増大すると非線形で非対称な分布に近づいてくる。しかし、 σ_z の分布は辺長比が増大するに従い線形分布になってくる。

4. あとがき

本研究で得られた主な結果を示すと、以下のようになる。

- 1) Spline prism法を用いれば、厚板から薄板までの精度の高い応力解析ができる。
- 2) 板厚が増大すると、応力分布形状は非線形になり、また表面荷重の影響により、非対称な応力分布形状を示す。
- 3) 特に、固定辺では、板厚比が小さい場合でも、非線形な応力分布形状を示している。

なお、本研究は、大同工業大学援助金を及び平成4年度科学研究費（一般(c)）を受けている。

参考文献

- 1) S.S.Srinivas et.al. 1969 ZAMM 49, 449-458, Flexure of simply supported thick homogeneous and laminated rectangular plates.
- 2) 奥村他 1982 土木学会論文集 326, 15-28, 一厚板理論による扇形平板の解析について。
- 3) 園田他 1978 土木学会論文集 273, 15-22, 道路橋床板の輪荷重直下の応力の算定について。
- 4) 島田他 1975 土木学会論文集 233, 13-23, 厚い長方形スラブの応力と変形。
- 5) O.C.Zienkiewicz et.al. 1972 I.C.E 40, 147-172, The finite prism in analysis of thick simply supported bridge boxes.
- 6) 林他 1992 土木学会論文集 450, 95-101, 節点プリズム法による三次元応力解析。
- 7) 水澤他 1993 構造工学論文集 39A, 1-12, スプライン要素法を用いた長方形厚板の振動解析について。
- 8) M.S.Cheung et.al. 1978 C&S 9, 629-638, Three-dimensional finite strip analysis elastic solids.