

スプライン帯板法を用いた非対称積層板の振動解析について

大同工業大学大学院 学生員 ○鬼頭博史

大同工業大学工学部 正会員 水澤富作

1. はじめに 高い比剛性や比強度を持つ繊維強化複合材料(FRP)は、軽量化、耐衝撃性や減衰特性などに優れ、以前から航空宇宙産業や自動車産業などで広く用いられている。このような複合材の中でも一方強化材を積層状にした積層板は、強い異方性を有し、また横せん断剛性が面内剛性、曲げ剛性と比較してかなり小さいので、薄板でも横せん断変形の影響が重要になる。また、強化繊維の配向角が θ° と $-\theta^\circ$ の組み合わせから成る逆対称アングル・プライ積層板では、曲げと面内挙動の連成効果が生じてくる。これまでも、対称積層板¹⁾や逆対称積層板²⁾の振動解析が行われてきているが、限られた条件での振動特性の研究が中心で、強い異方性材料の積極的な活用や信頼性の高い解析手法の開発などに問題が残されている。

本研究では、非対称積層板である逆対称アングル・プライ積層板の振動解析への横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した一次せん断変形理論(YNS積層板理論³⁾)に基づくスプライン帯板法の適用性について検討し、また逆対称アングル・プライ積層板の振動特性に与える積層組、配向角、積層数、弾性係数比、幅厚比などの影響を解析している。

2. 解析手法 Fig. 1に示す積層板の振動解析を行うために、YNS積層板理論に基づくスプライン帯板法により式の定式化を行っている。この逆対称アングル・プライ積層板では、各積層(ミサ)が直交異方性材料から成り、それぞれ完全に接着しているものと仮定する。材料主軸(1, 2)方向の弾性係数を E_1, E_2 , 横アソ比を ν_{12} 及びせん断弾性係数を G_{12}, G_{13}, G_{23} で表す。逆対称積層構造より、次式で定義される面内剛性、横せん断剛性 A_{ij} 、曲げ剛性 D_{ij} 、曲げと面内の連成剛性 B_{ij} を考慮する。

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{n=1}^N Q_{ij} (h_n - h_{n-1}); \quad i, j=1, 2, 6, \quad D_{ij} = (1/3) \sum_{n=1}^N Q_{ij} (h_n^3 - h_{n-1}^3); \quad i, j=1, 2, 6 \\ A_{ij} &= \kappa_{ij} \sum_{n=1}^N Q_{ij} (h_n - h_{n-1}); \quad i, j=4, 5, \quad B_{ij} = (1/2) \sum_{n=1}^N Q_{ij} (h_n^2 - h_{n-1}^2); \quad i, j=1, 2, 6 \end{aligned} \quad \dots (1)$$

ただし、 κ_{ij} はせん断修正係数、 Q_{ij} は n 層での弾性係数、 h_n は板中央面からの各積層面までの距離である。また、逆対称アングル・プライ積層構造では、 $D_{16}=D_{26}=A_{16}=A_{26}=A_{46}=B_{11}=B_{22}=B_{66}=0$ になる。

スプライン帯板要素の変位関数は、固有関数、 Y_m とスプライン関数を用いて次式で仮定する。

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=1}^r \sum_{k=1}^{iy} A_{mn} N_{n,k}(y) Y_m(x), \quad V = \sum_{n=1}^r \sum_{k=1}^{iy} B_{mn} N_{n,k}(y) \bar{Y}_m(x), \quad W = \sum_{n=1}^r \sum_{k=1}^{iy} C_{mn} N_{n,k}(y) Y_m(x) \\ \theta_x &= \sum_{n=1}^r \sum_{k=1}^{iy} D_{mn} N_{n,k}(y) \bar{Y}_m(x), \quad \theta_y = \sum_{n=1}^r \sum_{k=1}^{iy} E_{mn} N_{n,k}(y) Y_m(x) \end{aligned} \quad \dots (2)$$

ここで、 $iy=k-1+M_y$, $k-1$ はスプライン関数の次数、 M_y は帯板分割数、 r は固有関数の級数項、 $N_{n,k}$ は正規化されたB-スプライン関数であり、逆対称アングル・プライ積層板のひずみエネルギー、 U と運動エネルギー、 T は、次式で表される。

$$\begin{aligned} U &= (1/2) \int \int [A_{11}(U_x)^2 + 2A_{12}(V_y)(U_x) + 2B_{16}(\theta_{x,y})(U_x) + 2A_{66}(\theta_{y,x})(U_x) + A_{22}(V_y)^2 \\ &\quad + 2B_{26}(\theta_{x,y})(V_y) + 2B_{26}(\theta_{y,x})(V_y) + A_{66}(U_y)^2 + 2A_{66}(V_x)(U_y) \\ &\quad + 2B_{16}(\theta_{x,x})(U_y) + 2B_{26}(\theta_{y,y})(U_y) + A_{66}(V_x)^2 + 2B_{16}(\theta_{x,x})(V_x) \\ &\quad + 2B_{26}(\theta_{y,y})(U_x) + D_{11}(\theta_{x,x})^2 + 2D_{12}(\theta_{y,y})(\theta_{x,x}) + D_{22}(\theta_{y,y})^2 + D_{66}(\theta_{x,y})^2 \\ &\quad + 2D_{66}(\theta_{y,x})(\theta_{x,y}) + D_{66}(\theta_{y,x})^2 + A_{44}(\theta_y)^2 + 2A_{44}(\theta_y)(W_y) + A_{44}(W_y)^2 \\ &\quad + A_{55}(\theta_x)^2 + 2A_{55}(\theta_x)(W_x) + A_{55}(W_x)^2] dx dy \end{aligned} \quad \dots (3)$$

$$T = (\omega^2/2) \int \int [M_1(U^2 + V^2 + W^2) + M_2\{(\theta_x)^2 + (\theta_y)^2\}] dx dy \quad \dots (4)$$

ただし、 x, y は導関数を示し、 $M_1 = \sum_{n=1}^N \rho_n (h_n - h_{n-1})$, $M_2 = (1/3) \sum_{n=1}^N \rho_n (h_n^3 - h_{n-1}^3)$ であり、 ρ は密度、 ω は円振動

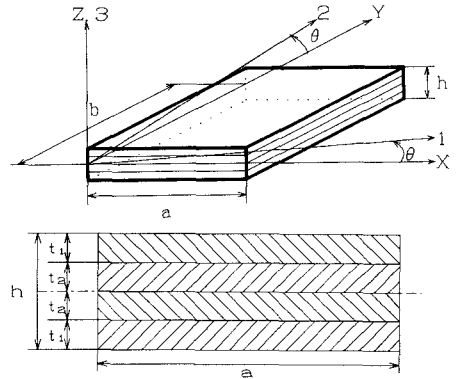


Fig.1 積層板モデル及び座標系

数(rad/sec)である。したがって、全ポテンシャルエネルギーを最小化すれば、運動方程式が導かれる。なお、相対する2辺が単純支持された場合には、固有関数の直交性により、各級数項ごとに固有値解析が行える。

3. 数値計算例及び考察 ここでは、相対する2辺が単純支持され、他の2辺が任意の境界条件を持つ逆対称アングル・プライ積層板の振動特性に与える配向角、積層数、弾性係数比、幅厚比や境界条件などの影響について解析する。本数値計算例で用いた複合材は、グライット/エポキシ材であり、次のような材料特性値を用いている。 $E_1/E_2=1\sim 40$, $G_{12}/E_2=G_{13}/E_2=0.6$, $G_{23}/E_2=0.5$, $\nu_{12}=0.25$ である。なお、 $\kappa_{44}=\kappa_{55}=5/6$ を用いた。

Table 1では、他の2辺が固定され、2層からなる逆対称アングル・プライ積層板($E_1/E_2=40$, $a/b=1.0$, $a/h=10$)の振動数 λ^* ・ n^* , $n^*=\omega a^2/\sqrt{\rho/E_2 h^2}$ の収束性に与えるスプライン次数と帯板数の影響が示されている。ここで、 M_y は2から10まで変化させ、 $k-1$ は3と5を用いた。これより、高次のスプライン帯板 ξ を用いれば、少ない帯板数でも安定した収束状態が得られる。Table 2では、種々の幅厚比を持つ、2層からなる周辺単純支持された逆対称アングル・プライ積層板($E_1/E_2=40$, $a/b=1.0$)の振動数 λ^* ・ n^* の精度比較が示されている。他の理論と比較して、良く一致している。

Table 3では、他の2辺が種々の境界条件を持つ4層の積層板($E_1/E_2=40$, $a/b=1.0$, $a/h=10$)の振動数 λ^* ・ n^* に与える配向角の組み合わせ方($\theta^*/-\theta^*$...)と層厚比、 t_1/t_2 の影響が示されている。これより、層厚比を減少させると境界条件に関係なく振動数 λ^* ・ n^* は増大する。一方、配向角の組み方は、自由の境界条件を含まない場合には、各層が同一の配向角が最も振動数 λ^* ・ n^* を高める。

Fig. 2では、他の2辺が固定された積層板の振動数 λ^* ・ n^* に与える積層数と幅厚比の影響が示されている。これより、積層数と幅厚比の影響が

Table 3 逆対称アングル・プライ積層板の振動数 λ^* ・ n^* に与える層厚比、 t_1/t_2 と配向角、 θ の影響; ($N=4$, $\theta=45^\circ$, $b/h=10$, $a/b=1.0$, $E_1/E_2=40$)

t_1/t_2	Boundary conditions					
	SS	SC	CC	FF	FS	FC
3/7	19.537	20.409	21.380	6.6187	10.701	10.972
2/3	19.224	20.121	21.120	6.5129	10.508	10.791
1/1	18.463	19.415	20.482	6.1623	10.049	10.357
3/2	17.348	18.371	19.529	5.9215	9.4029	9.7423
7/3	15.989	17.084	18.338	5.5315	8.6512	9.0194
4/1	14.587	15.737	17.072	5.1549	7.9099	8.2978
$(\theta^*/-\theta^*)$	SS	SC	CC	FF	FS	FC
45/-15/15/-45	14.627	16.305	18.000	7.5490	9.9549	10.142
45/-30/30/-45	16.832	18.428	19.768	6.8603	10.181	10.392
45/-45/45/-45	18.463	19.415	20.482	6.1623	10.049	10.357
45/-60/60/-45	16.832	18.821	20.468	5.2440	8.9191	9.6288
45/-75/75/-45	14.626	17.098	19.516	4.3667	7.4128	8.5482
45/-90/90/-45	11.598	14.112	16.848	4.0500	6.5466	7.5081

4. あとがき 一次せん断変形理論に基づくスプライン帯板法を用いて、逆対称アングル・プライ積層板の振動解析を行い、次の結果が得られた。1). 高次のスプライン帯板要素を用いれば、少ない要素数で安定した収束値と精度が得られる。2). 逆対称アングル・プライ積層板の振動数に与える積層数, N , 弾性係数比, E_1/E_2 や幅厚比 a/h の影響は大きく見られるが、その大きさは境界条件にも依存している。3). 同一の積層数を持つ逆対称アングル・プライ積層板の振動数は各積層の配向角や層厚を変えれば、振動数を変化させることができる。なお、本研究は平成4年度科研費(一般研究(C))を受けている。

参考文献 1). 鬼頭他:スプライン帯板法を用いた積層板の振動解析について、H5年度土木学会中部支部研究発表会講演概要集、I-24。2). 芳村他:逆対称アングル・プライ積層板の自由振動解析、構造工学論文集、vol.37A, 911-919, 1991。3). Yang, P.C. et al.: Elastic wave propagation in heterogeneous plates. IJSS, vol. 2, 665-684, 1966。4). Reddy J.N. and Phan N.D.: Stability and Vibration of plates. JSV, vol. 98, 157-170, 1985。5). Kheir, A.A. et al.: Analysis of symmetric cross-ply la-minated elastic plates using a higher-order theory. C&S, vol. 9, 259-277, 1988。

Table 1 逆対称アングル・プライ積層板の振動数 λ^* ・ n^* の収束性の検討; $N=2$, ($45^\circ/-45^\circ$), $E_1/E_2=40$, $G_{12}/E_2=G_{13}/E_2=0.6$, $G_{23}/E_2=0.5$, $\nu_{12}=0.25$, $a/b=1.0$, $t_1/t_2=1.0$

$k-1$	M_y	Modes			
		1	2	3	4
3	8	15.630	27.638	31.241	43.087
	10	15.630	27.637	31.240	43.085
5	2	15.636	27.662	31.414	43.190
	4	15.630	27.638	31.249	43.087
	6	15.629	27.637	31.238	43.085
	8	15.629	27.637	31.238	43.085

Table 2 逆対称アングル・プライ積層板の振動数 λ^* ・ n^* の精度比較; $N=2$, ($45^\circ/-45^\circ$), $E_1/E_2=40$, $G_{12}/E_2=G_{13}/E_2=0.6$, $G_{23}/E_2=0.5$, $\nu_{12}=0.25$, $a/b=1.0$, $t_1/t_2=1.0$

a/h	本手法	FSDPT ^(*)	HSDPT ^(*)	CPT ^(*)
4	9.161	9.168	9.759	12.566
5	10.335	10.335	10.840	13.885
10	13.044	13.044	13.263	14.439
20	14.179	14.179	14.246	14.587
100	14.618	14.618	14.621	14.636

FSDPT, HSDPT, CPTは、一次せん断変形理論、高次理論、薄板理論

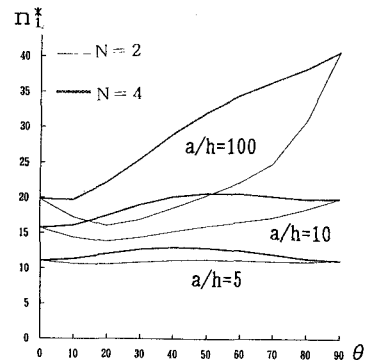


Fig. 2 振動数 λ^* ・ n^* に与える積層数 N と幅厚比 a/h の影響について; $E_1/E_2=40$, $a/b=1.0$, $t_1/t_2=1.0$