

長崎大学 工学部 学生員 ○西村一朗

長崎大学 工学部 正 員 松田 浩

長崎大学 工学部 正 員 森田千尋

長崎大学 工学部 正 員 崎山 毅

## 1. まえがき

本研究は、シェル厚が辺長に比べてあまり大きくない積層偏平シェルの弾性曲げ問題を、著者らの一部が既に提示した平板の一離散化手法<sup>1)</sup>で近似的に解析し、曲率やシェル形状、積層条件の差異による影響を明らかにするものである。本解析手法は、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により積層偏平シェルの支配方程式の解析的近似解を求め、これに基づいて積層偏平シェルの解析を行うものである。

## 2. 積層偏平シェルの基礎微分方程式およびその離散解

図1、2に示されるような曲率  $k_x = 1/R_x$ 、 $k_y = 1/R_y$ 、ねじれ率  $k_{xy} = 0$  を有し、 $n$  層のラミナからなる積層偏平シェルの中央面でのせん断力を  $Q_x$ 、 $Q_y$ 、曲げモーメントを  $M_x$ 、 $M_y$ 、ねじりモーメントを  $M_{xy}$ 、たわみ角を  $\theta_x$ 、 $\theta_y$ 、たわみを  $w$ 、面内変位を  $u$ 、 $v$ 、面内力を  $N_x$ 、 $N_y$ 、 $N_{xy}$  とすると、せん断変形を考慮した基礎微分方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - k_x Q_x = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - k_y Q_y = 0 \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_x N_x + k_y N_y + 2k_{xy} N_{xy} + q = 0 \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (1-5)$$

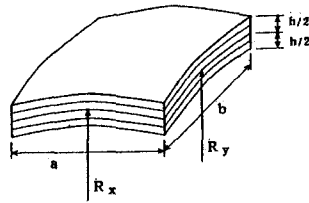


図1

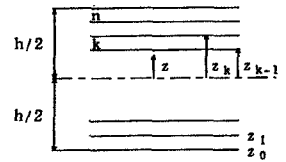


図2

$$M_x = B_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + B_{12} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + B_{16} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{16} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1-6)$$

$$M_y = B_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + B_{22} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + B_{26} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{26} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1-7)$$

$$M_{xy} = B_{16} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + B_{26} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + B_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + D_{16} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{66} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1-8)$$

$$Q_y = \kappa A_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + \kappa A_{45} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad (1-9)$$

$$Q_x = \kappa A_{45} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + \kappa A_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad (1-10)$$

$$N_x = A_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + A_{12} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + A_{16} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + B_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + B_{16} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1-11)$$

$$N_y = A_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + A_{22} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + A_{26} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + B_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + B_{26} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1-12)$$

$$N_{xy} = A_{16} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + A_{26} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + A_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + B_{16} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1-13)$$

ここに、 $q = q(x, y)$ :鉛直方向荷重強度、 $A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1})$ :積層シェルの面内剛性、

$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ijk})(z_k^2 - z_{k-1}^2)$ : 積層シェルのカップリング剛性、 $D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ijk})(z_k^3 - z_{k-1}^3)$ : 積層シェルの曲げ剛性、 $\bar{Q}_{ij}$ : 各層における任意方向の弾性係数、 $\kappa = 5/6$ : セン断修正係数

式(1-1)～(1-13)において、無次元量  $X_1 \sim X_{13}$  および  $\eta, \xi$

$$X_1 = a^2 Q_y / [D_0(1 - \nu_{LT} \nu_{TL})], X_2 = a^2 Q_z / [D_0(1 - \nu_{LT} \nu_{TL})], X_3 = a M_{xy} / [D_0(1 - \nu_{LT} \nu_{TL})], X_4 = a M_y / [D_0(1 - \nu_{LT} \nu_{TL})],$$

$$X_5 = a M_x / [D_0(1 - \nu_{LT} \nu_{TL})], X_6 = \theta_y, X_7 = \theta_x, X_8 = w/a, X_9 = v/a, X_{10} = u/a, X_{11} = a^2 N_{xy} / [D_0(1 - \nu_{LT} \nu_{TL})], X_{12} = a^2 N_y / [D_0(1 - \nu_{LT} \nu_{TL})],$$

$$X_{13} = a^2 N_x / [D_0(1 - \nu_{LT} \nu_{TL})], a, b$$
: 偏平シェルの矩形Baseの辺長,  $\mu = b/a$ ,  $h_0$ : 基準シェル厚,

$$D_0 = Eh_0^3 / [12(1 - \nu_{LT} \nu_{TL})]$$
: 基準シェル剛度

を導入し無次元化後、領域  $[i, j]$  において面積分することにより積分方程式に変換し、次に積分方程式の近似解法を応用すると、偏平シェルの任意の離散点における解析的近似解は次式のように求められる。

$$X_{pij} = \sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{l=0}^i a_{pijkl} X_{lkl} + \sum_{l=0}^j b_{pijkl} X_{lkl} \right\} + q_{pij} \quad (2)$$

式(2)の導入過程については、文献1)、を参照されたい。

### 3. 数値解析結果

数値解析例として、図3のように  $[-\theta, \theta]$   $[-\theta, \theta, -\theta, \theta]$  の積層角からなる2層、4層の4辺固定非対称積層偏平シェルの弾性曲げ解析を行った。

図4に等分布荷重を受ける非対称積層偏平E.Pシェルの積層角  $\theta$  と中央たわみ  $\alpha$  の関係を示す。ここに  $\alpha = w E h^3 \times 10^3 / q a^4$  である。

図5にE.P、H.P、C、各積層偏平シェルの  $K^* = 10$  と  $K^* = 0$  (Plate) に対する積層角と中央たわみの関係を示す。

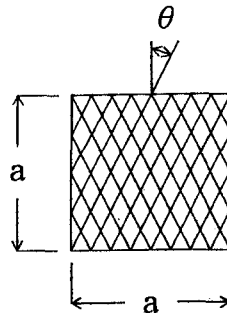


図3

$$\begin{aligned} E_L / E_T &= 40 \\ G_{LT} / E_T &= 0.5 \\ \nu_{LT} &= 0.25 \\ G_{TT} / E_T &= 0.5 \\ a / h &= 100 \\ K^* &= \sqrt{12(1 - \nu_{LT} \nu_{TL})} / Rh \end{aligned}$$

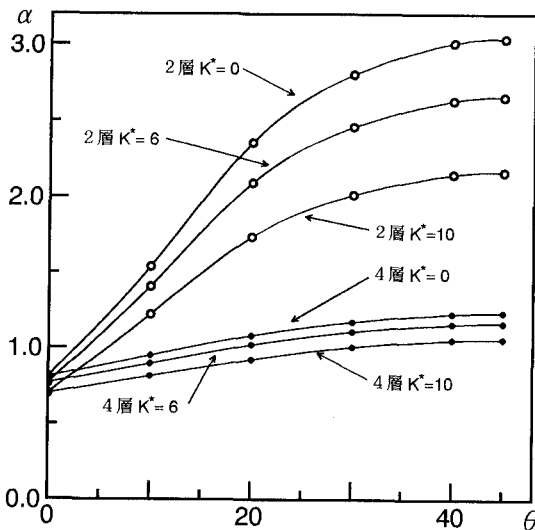


図4 積層E.Pシェルの積層角と中央たわみの関係

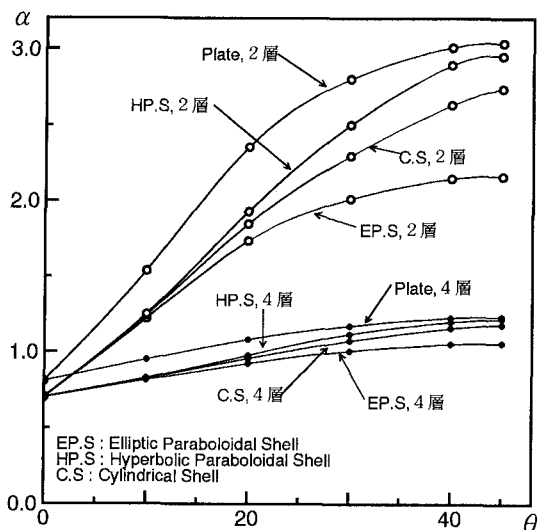


図5 各積層偏平シェルの積層角と中央たわみの関係

[参考文献] 1) 崎山毅, 松田浩: 変厚矩形板の曲げの一解析法, 土木学会論文報告集, 第338号, pp.21-28, 1983.