# I－671　FFTを用いた数値ラプラス変換・逆変換

川田工業（株）　正会員　須澤雅人
長岡技術科学大学　正会員　岩崎英治
長岡技術科学大学　正会員　林　正

## 1.　まえがき

波動や動弾性問題等の物理学や工学上の問題を解析的に解く場合には、ラプラス変換を用いることが一般的である。しかし、逆変換が煩雑になり、困難なこともある。このため、数値的に逆変換を行う種々の手法が考えられている[1)]。また、逆変換と正変換の両方を数値的に行える手法として、Wilcox[2)]や井上ら[3)]の研究がある。前者の方法は、ある時刻での原関数値を求めることを主目的としており、原関数の時系列値を求める場合には、個々の時刻での値を個々に逆変換する必要がある。後者の方法は、ラプラス変換にFFTを用いた手法であり、ある程度の精度で一連の時刻での関数値を前者よりも少ない計算量で求められる。したがって、前述の問題の時刻歴応答を知るには、後者の方法が適している。しかし、FFTを用いた後者の手法の適用性や精度に関する検討はあまり行われていない。そこで、本報告では、FFTを用いた方法に、幾つかのパラメータを導入した定式化を行い、その適用性や精度について検討する。

## 2.　ラプラス変換・逆変換

関数 $f(t)$ を $t$ についてラプラス変換した関数を $F(s)$ とすると、変換と逆変換は次のように表される。

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad , \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)e^{st}ds \cdots\cdots (1)$$

上式の逆変換の積分は、複素平面上で直線 $s=\alpha$ に沿って実行され、実定数 $\alpha$ は、像関数 $F(s)$ の全ての特異点の右側にあるように指定しなければならない。

変換パラメータ $s$ の実部を上述の $\alpha$、虚部を $\omega$ とすると、像関数は、定数 $\alpha$ と $\omega$ の関数になるので、$F(s)$ を $F(\omega)$ と表す。また、式(1)の第一式の積分を、幅 $T$ で区切って区間 $[0,T],[T,2T],\cdots,[nT,(n+1)T],\cdots$ 毎に積分したものの総和で表し、第二式の積分も同様に幅 $\Omega$ で区切って積分したものの総和で表して、それぞれの式をさらに変形すると、次のようになる。

$$F(\omega)=\int_0^{T}\sum_{n=0}^{\infty} f(t+nT)e^{-(\alpha+i\omega)(t+nT)}dt \quad , \qquad f(t)=\frac{e^{\alpha t}}{2\pi}\int_{-\Omega/2}^{\Omega/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega+n\Omega)e^{i(\omega+n\Omega)t}d\omega \cdots (2)$$

## 3.　離散化とFFTを用いた計算法

式(2)を数値的に扱うために、$\omega$ と $t$ を離散的な値で表す必要がある。そこで、$\omega$ と $t$ は、次のように幅 $\Omega, T$ 内に $N$ 個の等間隔な離散点を取るものとする。

$$\left.\begin{aligned} \omega&=\omega_k=(k+\beta_\omega)\Delta\omega \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm\infty)\\ t&=t_m=(m+\beta_t)\Delta t \qquad (m=0,1,2,\cdots,\infty)\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (3)$$

ここに、$\Delta\omega, \Delta t$ はそれぞれ、$\Omega/N, T/N$ で与えられる。また、$\beta_\omega, \beta_t$ は適当な定数である。

ところで、上式の $\Omega$ と $T$ は独立に与えられるものであるが、FFTのアルゴリズムを使用できるように、$\Omega T=2\pi N$ のような関係があるものとする。この関係式より、$\Delta\omega$ は、$T$ から $\Delta\omega=2\pi/T$ と表される。

式(3)と上述の関係を用いて式(2)を変形すると次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} \hat{F}(\omega_k)&=\frac{T}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\hat{f}(t_m)e^{-(\alpha+i\omega_k)t_m} \qquad (k=0,1,2,\cdots,N-1)\\ \hat{f}(t_m)&=\frac{e^{\alpha t_m}}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{F}(\omega_k)e^{i\omega_k t_m} \qquad (m=0,1,2,\cdots,N-1)\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (4)$$

ここに、$\hat{f}(t_m)$ と $\hat{F}(\omega_k)$ は、原関数 $f(t_m)$ と像関数 $F(\omega_k)$ から次式で与えられる。

$$\hat{f}(t_m)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\pi i\beta_\omega} e^{-n\alpha T} f(t_m+nT) \quad , \quad \hat{F}(\omega_k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2n\pi i\beta_t} F(\omega_k+n\Omega) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

なお、これらの式の誘導に際して、$\hat{f}(t_m)e^{-(\alpha+i\omega_k)t_m}$と$\hat{F}(\omega_k)e^{i\omega_k t_m}$を、それぞれ周期$T,\Omega$の関数としている。

式(4)を、さらに変形すると離散フーリエ変換・逆変換式が得られ、FFTを使用できる。

ところで、$\omega$と$t$の離散化に際して、$\beta_\omega=(\Delta\omega-\Omega)/2, \beta_t=\Delta t/2$、$\beta_\omega=-\Omega/2, \beta_t=0$とおくと、それぞれWilcox、井上らによる手法に対応する。なお、Wilcoxの手法では、定式化の段階で式(1)の積分区間をそれぞれ、有限区間$T,\Omega$として扱っていることから、式(5)は現れてこない。

## 4. 数値ラプラス変換・逆変換の精度

正変換は、関数$f(t_m)$から式(5)により$\hat{f}(t_m)$を求め、式(4)により$\hat{F}(\omega_k)$が求められる。逆変換では、像関数$F(\omega_k)$から式(5)により$\hat{F}(\omega_k)$を求め、式(4)により$\hat{f}(t_m)$が求められる。しかし、$\hat{f}(t_m), \hat{F}(\omega_k)$から$f(t_m), F(\omega_k)$は求められない。式(5)のそれぞれ式で$n=0$の項は$f(t_m), F(\omega_k)$になることから、$n\neq 0$の項がゼロと見なせる程小さくなければならない。したがって、数値ラプラス変換・逆変換には、式(5)の$n\neq 0$の項による誤差と、この式を誘導する際に用いた仮定による誤差が含まれる。さらに、式(5)は無限級数になっていることから、$f(t_m), F(\omega_k)$から$\hat{f}(t_m), \hat{F}(\omega_k)$を求める際の打切り誤差が含まれる。

ところで、関数$f(t)$は、物理的な諸量なので、実関数と考えられる。このとき、像関数には$\bar{F}(s)=F(\bar{s})$の関係が存在している。ここに、$\bar{s}$は$s$の共役複素数である。$\omega$を離散化する際に、全ての離散点が原点に関して、対称な位置になければ、関数$f(t)$を数値変換して求めた$\hat{F}(s)$に上述の関係が成り立たない。また、像関数$F(s)$を数値逆変換して求めた$\hat{f}(t)$は複素関数になる。$\beta_\omega=\Omega/2$とした井上らの手法では、対称な位置に全ての離散点を置くためには、離散点の数$N$を奇数としなければならない。しかし、FFTを効率良く使用するためには$N$を2のべき乗になる数におく必要があることから、井上らの手法では、上述の関係を満たさないことによる誤差が含まれている。これらのことから、$\omega$の離散点を、原点に関して対称な位置に置き、離散点数$N$を偶数にするためには、Wilcoxが用いたように$\beta_\omega=(\Delta\omega-\Omega)/2$とおく必要がある。

## 5. 数値計算例

像関数$F(s)=1/\sqrt{1+s^2}$の数値逆変換を行った結果を**図-1**に示す。なお、原関数は$f(t)=J_0(t)$(0次のBessel関数)である。また、$T=10$、$N=32$、$\alpha=0.4\Delta\omega$としている。図において、演算子$\mathcal{L}^{-1}$は、式(4)の第2式により、$\hat{f}(t)$を数値的に求める操作を表しており、$\mathcal{L}^{-1}F(\omega)$は、式(5)の第2式において$n=0$以外の項を省略して求めた$\hat{f}(t)$を表し、定数$\beta_t=0.0$, 0.5, 1.0の場合について示している。また、図中の$\hat{f}(t)$は原関数$f(t)$から式(5)の第1式により直接求めたものである。この図より、$\mathcal{L}^{-1}F(\omega)$と$\hat{f}(t)$の間には誤差が有り、定数$\beta_t$により誤差は変化することが分かる。また、$\hat{f}(t)$と$f(t)$の間には図示されているような誤差がある。この誤差は一般に、$\alpha$を大きくすると小さくできるが、$\mathcal{L}^{-1}F(\omega)$と$\hat{f}(t)$の間の誤差が増大する。なお、$N$を多くしても、$\hat{f}(t)$と$f(t)$の間の誤差は変化しないが、$\mathcal{L}^{-1}F(\omega)$と$\hat{f}(t)$の間の誤差は小さくなる。

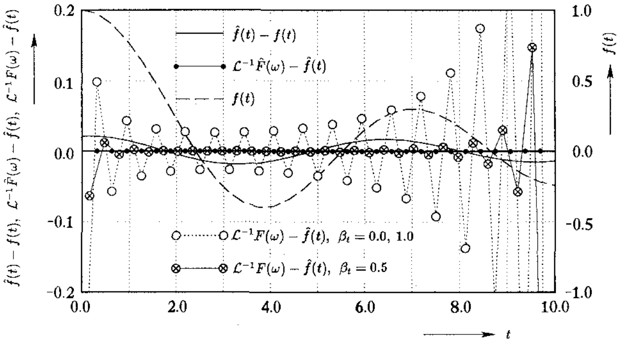


**図-1** $F(s)=1/\sqrt{1+s^2}$ **の数値逆変換**

**参考文献**


1) Davies,B. and Martin,B.: Numerical inversion of the Laplace transform, *J.Comp.Phys.*, 33, 1979.
2) Wilcox,D.J.:Numerical Laplace transformation and inversion, *Int.J.Elect.Engng.Educ.*, Vol.15, pp.247-265, 1978.
3) 井上裕嗣・上林　稔・岸本喜久雄・渋谷寿一・小泉　堯：高速フーリエ変換を利用した数値ラプラス変換・逆変換, 日本機械学会論文集(A編), 57巻542号, pp.245-250, 1991.