Ⅰ－642　弾性棒における力積の関係

松尾建設　正会員　佐々木　定

1.　はじめに

ニュートンの運動法則より導かれる”力積＝運動量の変化”の関係を、弾性棒の場合について考察し、加えた力は作用面の変位速度に比例するが、その場合でも”力積の関係”は成立することを考察した。

また球の衝突で不明とされている衝撃力とその作用時間即ち力積[1]が、弾性棒とすることで求まることを考察した。加速度が無限大となる現象が弾性棒に生ずるが、それは無限大の衝撃力を示すのではなく力の立ち上がりを示すものであり、衝突の力は後に続くことを求めた。

2.弾性棒における力積の関係

今、図－１のような剛性棒と弾性棒を考え、Ａ面に力Ｐが作用したとする。ニュートンの運動法則”力積＝運動量の変化”より、

$P\Delta t = (Mv) - (Mv)_0$

①剛性棒の場合は、質量$M=\rho Q l$

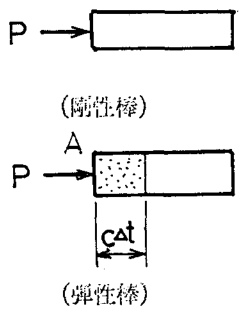
$\therefore\ P=\rho Q l\ (v-v_0)/\Delta t$

即ち、力は変位加速度に比例する。

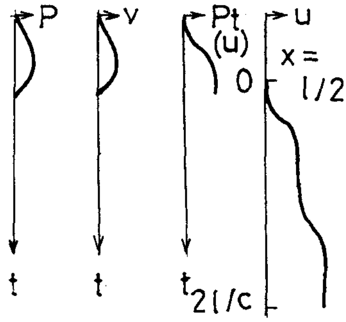
②弾性棒の場合は、運動に参加する質量$M=\rho Q c\Delta t$

$\therefore\ P=(\rho Q c\Delta t)\ (v-v_0)/\Delta t=\rho Q c\ (v-v_0)$

即ち、力はＡ面の変位速度に比例する。



図－１　力と物体



図－２　弾性棒の力積関係

これは波動理論より導かれる応力と変位速度の関係式と一致する[2]。弾性棒中を伝播する波動が

$u(x,t)=u(x-ct)+u(x+ct)=u^+(x,t)+u^-(x,t)$

で表されるとき、弾性棒中の各点に生ずる応力と変位速度の関係は

$\sigma(x,t)=\sigma^+(x,t)+\sigma^-(x,t)=-\rho c v^+(x,t)+\rho c v^-(x,t)$

$v(x,t)=v^+(x,t)+v^-(x,t)=\{-\sigma^+(x,t)+\sigma^-(x,t)\}/\rho c$

ここで、ｘ：位置、ｔ：時間、ｕ：変位、σ：応力、ｖ：変位速度、＋記号：正進行波動、－記号：逆進行波動、ρ：密度、ｃ：波動伝播速度、ρｃ：インピーダンス、Ｑ：棒の断面積、ｌ：棒の長さである。

ここで更に弾性棒の力積をとってみると

$\int P\,dt=\int \rho Q c v^+\,dt=\rho Q c\int v^+\,dt=\rho Q c u^+$

即ち、変位量u^+に比例することとなる。連続体が半無限長の場合は、この変位量u^+を生じる波動は先へ伝播して行き帰って来ないが、ｌの長さである場合は波動が反射して帰ってきて変位量u^-（$=u^+$）が再度生ずる。その１サイクルの時間ｔは　$t=2l/c$　であるので、平均速度をv_mとすると

$v_m=c\ (u^++u^-)/2l=cu^+/l\quad\therefore\ \int P\,dt=(\rho Q l)\ (cu^+/l)=Mv_m$

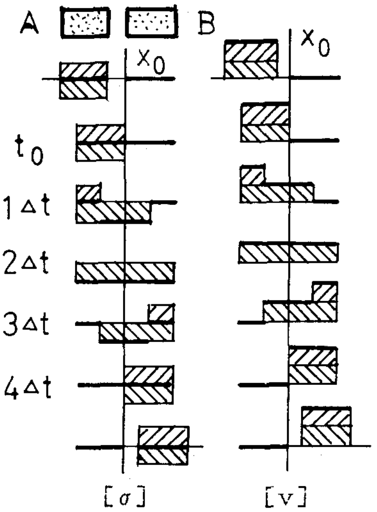
となって、”力積＝運動量の変化”の関係が成立する。

3.　弾性棒の衝突時における力積その他現象

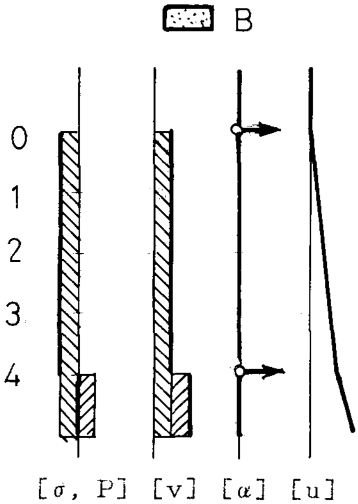
これまでに、球（剛性体）の衝突における運動保存の法則はよく知られているが、それに対応する力積即ち力と作用時間は大きな力が短時間に作用するとしながら求められていない[1]。これを弾性棒の衝突として扱うとそれらを求めることができる。単純な等断面積の等質・等寸の棒の衝突で考察する。

①図式解法を用いる。②全波動は太実線、正進行波動は右下斜線模様、逆進行波動は左下斜線模様で表す。③等質であるので衝突面（$x=x_0$）において棒Ａより棒Ｂへ、棒Ｂより棒Ａへそのままの波動が透過する。④自由端における波動の反射は棒端において　$\sigma^-=-\sigma^+$、$v^-=v^+$　⑤棒Ａの右端と棒Ｂの左端が接触

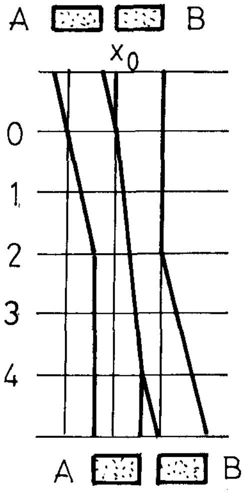
を続けるための条件は、$v_A\ (x_0\ ,t) \geqq v_B\ (x_0\ ,t)$ 。図－３において⑥棒Aおよび棒Bは密度ρ、弾性波伝播速度c、長さl、断面積Qをもつものとする。⑦棒Aは全応力$\sigma_A=0$、全変位速度$v_A=V$、で運動しているものとし、$v^+_A=v^-_A=V/2$とする。⑧棒Bの波動状況は静止状態とし、$\sigma_B=0$，$v_B=0$　とする。⑨衝突開始時はt_0とする。⑩衝突後、時間$\Delta t=l/2c$毎の両棒中の波動状況を描く。⑪$2\Delta t$後、v^+_B，σ^+_Bは棒Bの右端に到達して自由端反射する。⑫$4\Delta t$後、v^-_B，σ^-_Bが棒Bの左端に到達し、棒Bの左端の全変位速度Vが棒Aの右端のものより大きくなるので、棒Aと棒Bの接触がなくなる。図－４において、⑬棒Bの左端の応力、変位速度を位置x軸表示から時間t軸表示に換え、変位速度vを時間tで微分すると加速度が求まる。図－５において、⑭各点の変位速度を積分すると変位uが求まる。



図－３　波動の伝播



図－４　棒B左端の衝突力他



図－５　変位［u］

以上の成果に基ずき考察すると

①衝突面において作用および反作用される力は、$P=\sigma_A\cdot Q=-\rho cVQ/2$　すなわち棒Aの速度の半分に比例する。②力Pの作用する時間Tは、$T=4\Delta t=2l/c$　となる。

③”力積＝運動量の変化”の関係は、棒A，Bの全質量$M=\rho Ql$であり、

棒A：　力積$=-P\cdot T=(\rho cVQ/2)\cdot(2l/c)=\rho Ql\cdot(0-V)$＝運動量の変化

棒B：　力積$=\ P\cdot T=\rho Ql\cdot(V-0)$＝運動量の変化

④棒Aが衝突後に静止する位置は、衝突を開始した位置より、$a=V\cdot l/c$となる。もし棒Aの変位速度が波動伝播速度cに等しいときは、$a=l$となり、棒Aは棒Bの居た位置に入れ替わることとなる。$v>c$の変位速度の場合は、垂直変位波動においては波動伝播より変位が早いことになり別の理論が必要。⑤衝突によって棒A中に存在する波動は棒B中へ透過するが、図－４の如く接触した瞬間に棒B中の応力$\sigma^+_B(x_0\ ,\ t_0)$は０からある有価なものに立ち上がり、後一定値となる。また変位速度$v^+_B\ (x_0\ ,\ t_0)$も同様となる。故に加速度は、変位速度の立ち上がりの瞬間に∞の価となりその後はしばらく０となる。この時点の変位$y^+_B\ (x_0\ ,\ t_0)$は、角折れ形となる。　無限大の加速度は無限大の力となるという概念をもっていることから、この加速度∞現象を大きな衝撃力と思い勝ちであるが、この現象は変位速度の上昇すなわち応力の上昇を表しているものであり、衝突によって実際に生ずる力は$P\ (x_0\ ,\ t)$の状況で見たように立ち上がり時も含めて、その後も続行して作用し、また有価である。この違いは2.に述べたとおりである。

文献　1)太田信義：一般物理学（上），丸善（株），1992

2)土質工学会：杭の打ち込み性および波動理論の杭への応用に関するシンポジウム発表論文集，1989