

○熊本大学 正 員 平井一男
八代高専 内山義博

1. はじめに

応力集中問題をFEMで解析する場合、応力勾配の大きい所程メッシュ分割を細かくする必要がありそれにつれて計算容量も大きくなる。筆者らは、初め荒いメッシュで解析しておき応力変化の大きい部分のみを取り出し次々と再解析していけるズーム法¹⁾を提案した。この手法は、解析的には厳密でズームは何回でも可能であるが、たわみ性マトリックスを用いることから一回のズームに大きな容量を必要とした。

本報告では、構造物における剛性マトリックスは一般にバンドマトリックスであるから、この特性を利用した修正ズーム法の誘導を行い、数値計算によって検討を加えた。

2. 理論

2.1 分割法²⁾による逆マトリックスの表現

分割法によると式①の様に分割されているマトリックスKの逆マトリックスfは式②のように表される。

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \dots \quad (1) \quad f = K^{-1} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{-1} + VZ^{-1}Y & -VZ^{-1} \\ -Z^{-1}Y & Z^{-1} \end{bmatrix} \dots \quad (2)$$

ここで、 $V = K_{11}^{-1}K_{12} \dots \quad (3)$, $Y = K_{21}K_{11}^{-1} \dots \quad (4)$, $Z = K_{22} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12} \dots \quad (5)$ である。

2.2 修正ズーム法の誘導

原系で、外力ベクトルを $F^{(0)}$ 、剛性マトリックスを $K^{(0)}$ 、変位ベクトルを $X^{(0)}$ とすると、剛性方程式は

$$F^{(0)} = K^{(0)} X^{(0)} \dots \quad (6) \quad \text{但し、上添字はズーム回数を表す。}$$

変位の算定は、Kがバンドマトリックスであるからこれを壊さないようにKを三角分解し求める。すなわち

$$K = LDU \quad \text{より} \quad (LDU)^{(0)} X^{(0)} = F^{(0)} \dots \quad (7)$$

変位Xを求める式の表示法として、表記の便のために次の様に表す。

$$X^{(0)} = f^{(0)} F^{(0)} \dots \quad (8)$$

今、図-1に示す様な集中問題を荒いメッシュで解き、その結果よりB部を細分割するものとする。ズーム法³⁾(以下、前ズーム法と呼ぶ)によれば、全体を再解析することなく細分割したB部のみで取り扱うためには、A部並びに外力の影響をズーム境界部 L_1-N_1 に縮合すればよい。但し、このまま原系を用いると境界を含んだB部の逆マトリックスの計算を必要とする。これを避けるために、まずA部を取り出し再解析を行う。この時、A部を安定に拘束するためにB部の一部(ΔK)を含んだKを用いる。A部の変位は

$$F_A^{(0)} = K_A^{(0)} X_A^{(0)} \quad \text{より} \quad X_A^{(0)} = f_A^{(0)} F_A^{(0)} \dots \quad (9)$$

境界 L_1-N_1 に対応するたわみ性マトリックス $f_{22}^{(0)}$ の第i行j列要素は境界上のj点にのみ単位の荷重を作用させた時のi点の変位で表される。すなわち、j点のみ1で、他は零である単位ベクトルを I_j とすると

$$K_A^{(0)} f_{1j}^{(0)} = I_j \dots \quad f_{1j}^{(0)} = f_A^{(0)} I_j \dots \quad (10)$$

得られた $f_{22}^{(0)}$ の大きさは境界部の自由度である。これよりZは式②、⑤より

$$Z^{(0)} = f_{22}^{(0)-1} = K_{22}^{(0)} - K_{21}^{(0)} K_{11}^{(0)-1} K_{12}^{(0)} \dots \quad (11)$$

従って、A部を境界 L_1-N_1 部に縮合した剛性マトリックス $\bar{Z}^{(0)}$ は

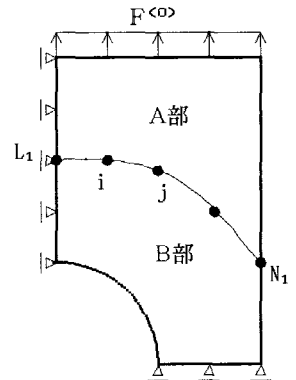


図-1 原系

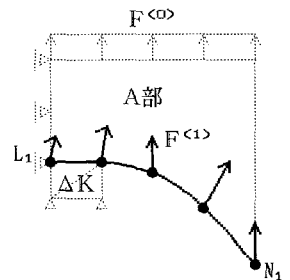


図-2 ズーム境界部

$$\bar{Z}^{(0)} = Z^{(0)} - \Delta K \quad \dots \quad (12)$$

で表される。一方、境界に作用する外力 $F^{(1)}$ は、式⑨で境界部の変位を $\bar{X}_A^{(0)}$ とすると式②、⑪より

$$F^{(1)} = Y F^{(0)} = -Z^{(0)} \bar{X}_A^{(0)} \quad \dots \quad (13)$$

以上で、次のズームに必要な諸量は全て求められた。

細分割されたB部を境界部と内部とで分割表示し、式⑫の $\bar{Z}^{(0)}$ と重ね合わせると、1回ズーム時の剛性マトリックスは次のように得られる。

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}^{(B)} & K_{12}^{(B)} \\ K_{21}^{(B)} & K_{22}^{(B)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}^{(0)} + K_{11}^{(B)} & K_{12}^{(B)} \\ K_{21}^{(B)} & K_{22}^{(B)} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (14)$$

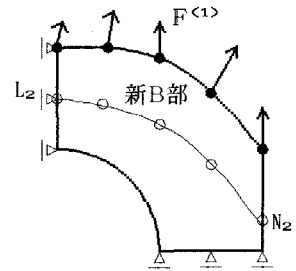


図-3 1回ズーム

従って、新B部の変位は

$$F^{(1)} = K^{(1)} X^{(1)} \quad \text{より} \quad X^{(1)} = f^{(1)} F^{(1)} \quad \dots \quad (15)$$

2回ズームも、図-3に示すように細分割する領域が決れば前回同様、ズーム境界 $L_2 - N_2$ に剛性マトリックス、荷重を縮合すればよい。以下、同様の演算を繰り返せば2回ズーム以降も同様に行える。

3. 数値計算

図-4に示すような、中央に円穴を持つ平板が一樣引っ張りを受けるモデルについて解析を行った。モデルは左右上下対称であるので斜線部1/4部

表-1 円穴モデル諸元

分布荷重	P	1.0 kgf/mm
長さ	L	4.0 mm
幅	B	20.0 mm
板厚	t	1.0 mm
弾性係数	E	1.0 kgf/mm ²
ポアソン比	ν	0.3
直径	d	4.0 mm

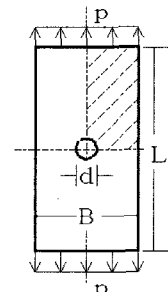


図-4 円穴モデル

を取り出して解析を行った。モデル諸元を表-1に示す。メッシュ形状の異なる3つのモデルの解析結果を図-5に示す。要素は三角形内一定ひずみ要素を用い、倍精度計算で行った。本法での解析結果は前ズーム法と同一となった。要素分割の仕方、節点番号の付け方等によってバンド幅は変化するので、マトリックス容量、計算時間はモデルによって当然異なるが、本計算例では3モデルとも容量、計算時間とも本法は前ズーム法と比べて約1/3であった。

4. 結論

本法はバンドマトリックスを用いる事からモデルによって、あるいはデータ作成時に若干の手間がかかるが、計算例で示すように計算容量、時間共に一応の成果を得た。マイコン程度の計算機でもかなり集中度の高い問題の解析が可能であろう。

参考文献 1) I. Hirai, Y. Uchiyama, Y. Mizuta, W. D. Pilky :

AN EXACT ZOOMING METHOD, Finite Elements in Analysis and Design 1, 1985

2) 古屋茂：行列と行列式（新数学シリーズ），培風館，p61～p67

3) 内山、平井：効果的なズーム法，八代高専紀要第12号，27-32，1990年3月

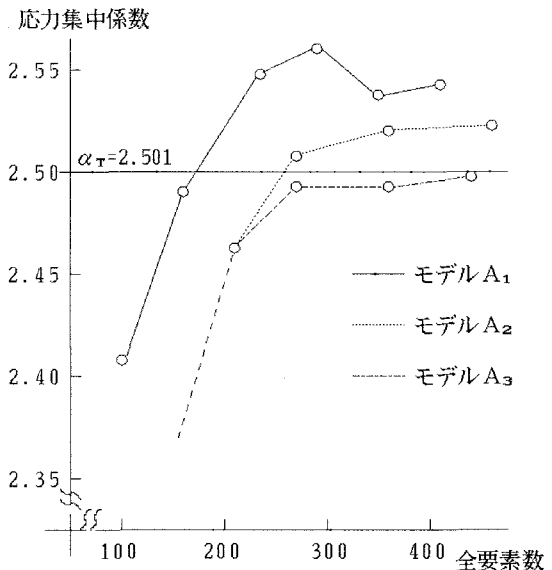


図-5 応力集中係数と要素数の関係