

I-635

Kellyの理論に基づく有限要素法の事後誤差評価に関する検討

武蔵工業大学 学生員 永田 考

武蔵工業大学 正 員 増田 陳 紀

武蔵工業大学 佐々木康友

武蔵工業大学 芳田宏一郎

1. はじめに

有限要素法は、解析に必要なデータが準備できれば解が得られるという便利さから構造工学を中心に多くの方面で利用されている。線形解析では、モデル化が妥当ならば得られる解の信頼性も高いと言われているが、適切なモデル化を行うにはある程度の経験が必要とする。また、得られた解についても物理的に妥当であると判断するためには、それなりの知識が必要となる。これらの要求を不要とする一つの方法として、事後誤差評価を利用し順応型要素再分割を用いて所要精度の解を求める方法が考えられており、実用化されてきている。

ここではKellyの事後誤差評価式¹⁾を平面応力問題において適用し、ひずみ一定三角形要素(CST要素)、および応力仮定のハイブリッド法に基づく三角形要素(ASHT要素)²⁾での事後誤差評価法の実際の適用性を検討することを目的とする。例題として、理論解の存在する対向集中荷重を受ける円盤を取り上げ、真の誤差と誤差評価による誤差との比較を通して基本的な適用法、適用性などについて検討する。

2. 事後誤差評価の基礎理論

Kellyによる誤差評価の理論は、有限要素解析によって得られる応力から要素境界における応力の不連続量を算出し、それを再び有限要素解析の入力荷重として同じ解析手法を用いて解析を行うと、変位の代わり

に誤差が得られることを示している(次式参照)¹⁾。

有限要素法の弱形式

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{g}} \mathbf{w} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{w} d\Omega = 0$$

誤差評価法の弱形式

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{e} \nabla \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Gamma} \rho \mathbf{w} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{r} \mathbf{w} d\Omega = 0$$

ここで $\mathbf{u}$ は変位、 $\bar{\mathbf{g}}$ および $\mathbf{f}$ は表面力および物体力、 $\mathbf{w}$ は重み、 Ω 、 Γ は領域および境界を示す。また、 $\mathbf{e}$ は変位の誤差、 ρ および $\mathbf{r}$ は境界および領域内における応力のつり合い方程式の差である。

3. 応力の不連続量の定義

ここでは、板の面内応力に関する応力の不連続量を要素間に現れるもの(内部境界)と外部と要素の間に現れるもの(外部境界)の2つに分けて定義する(図-1参照)。内部境界での応力の不連続量 ρ は、隣合う要素 α 、 β の応力テンソル σ の差に要素 α に対する外向き単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を掛けたものとし、次式のようになる。

$$\rho_{ij}^{lm} = (\sigma_{ij}^{\alpha} - \sigma_{ij}^{\beta}) n_j^{\alpha}$$

外部境界での応力の不連続量 ρ は、その境界に接する要素 α の応力テンソル σ に外向き法線ベクトル $\mathbf{n}$ を掛けたものとする。また、外部境界に外力が作用している場合は、応力の不連続量から荷重密度ベクトル $\mathbf{q}$ を差し引いたものとする。よって次式のようになる。

$$\rho_{ij}^{st} = \sigma_{ij}^{\alpha} n_j^{\alpha} - q_i^{st}$$

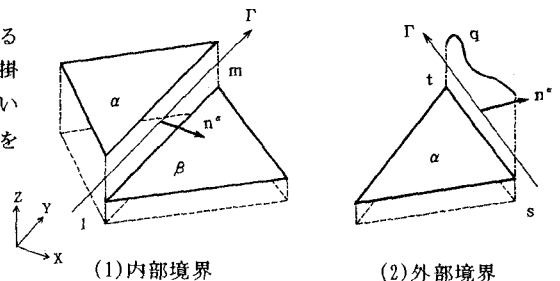


図-1 応力不連続量の概念

4. 解析概要

解析対象は、対向集中荷重20kgfを受ける半径5cm、板厚1cmの円盤とし、対称性を考慮した1/4部分につ

いて有限要素解析を行う。要素分割は、計算結果に分割様式が影響を与えないように均一分割様式とし、半径方向に2分割とした。解析諸条件を図-2に示す。

事後誤差評価を行う場合、変位解析で用いた1要素をさらにいくつか分割する。変位解析によって得られる応力は、CST要素の場合は変位要素内で一定となりASHT要素の場合は要素内に線形分布する。得られる応力分布より、各要素境界における不連続量を算出する。誤差解析にも有限要素法を用いるため、応力の不連続量は境界上に新たに現れる節点上の等価節点力に置き換えられる。

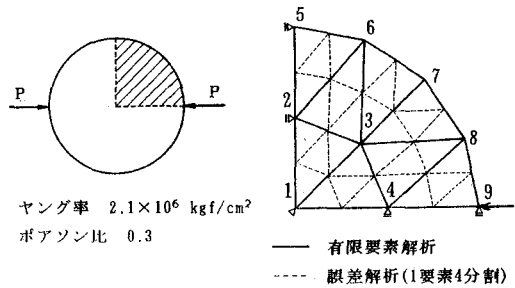


図-2 解析対象および要素分割図

5. 解析結果および考察

荷重載荷点で応力の理論解は無限大となるので、荷重載荷方向に半径の0.2%内部の点の応力値を荷重載荷点での応力値として応力の不連続量を評価し真の変位の誤差を求めた。CST要素の場合およびASHT要素の場合ともに、解析対象の円弧上の節点における真の変位の誤差および誤差評価による誤差のノルムを比較した。CST要素の場合、荷重載荷点付近以外では真の誤差と誤差評価による誤差とがほとんど等しくなり、誤差評価の際に用いる分割が細かいほど、誤差評価による誤差は、真の誤差に近づく（図-3）。これに対しASHT要素では、CST要素ほどの一致はみられないが、誤差評価の際に用いる分割を細かくするほど、誤差評価による誤差が、真の誤差に近づくことがわかる（図-4）。どちらの場合も誤差評価の精度はかなり高い。よってKellyの事後誤差評価の理論の適用性が確認できた。

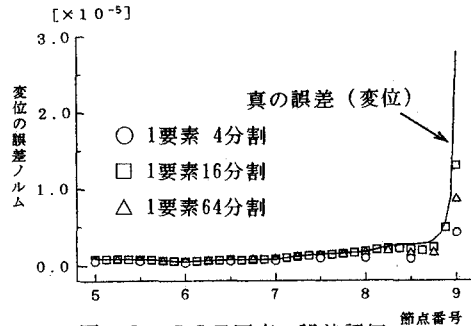


図-3 CST要素の誤差評価

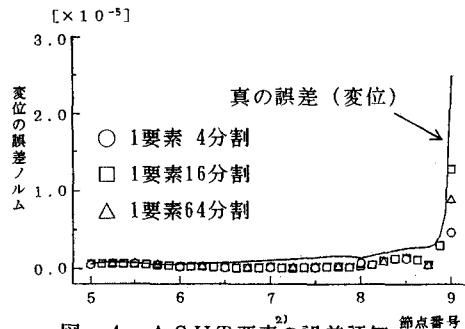


図-4 ASHT要素の誤差評価

6. おわりに

どちらの要素とも事後誤差評価のための要素分割を増やすと評価誤差が真の誤差に収束する傾向を示すことを確認した。また、1要素あたりの要素分割が4程度（最も粗い分割）でも真の誤差が大きな所では、誤差評価による誤差も大きくなるのが分かる。ここで対象とした問題は一例のみであり今後さらに種々の基本的な境界条件および荷重条件の下での検討が必要であるが、Kellyの理論に基づく事後誤差評価が実際の数値計算上も有効であることが明かとなった。次の課題はより広い範囲の解析モデルに対する誤差評価の適用性を検討するとともに、事後誤差評価を用いて順応型要素再分割を行う具体的かつ効率的な方法を構築することである。

- 【参考文献】1) Kelly, D.W.: The Self-equilibration of Residuals and Complementary a Posteriori Error Estimates in the Finite Element Method, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 20, pp. 1491-1506, 1984
 2) 吉田 裕・雨宮栄一郎・増田陳紀：立体構造解析のための薄板有限要素，土木学会論文報告集，第211号，pp. 19-28，1973.3
 3) 国尾 武：固体力学の基礎，培風館，pp. 181-183，1977
 4) 大坪英臣ほか：有限要素法の事後誤差評価を利用した順応型要素分割法に関する研究，日本造船学会論文集，No. 167，pp. 179-189，1990.5