

中部電力	正会員	藤井 誠
京都市工学部	正会員	小林昭一
京都市工学部	正会員	西村直志

1. はじめに

ある有界領域 D 内において運動方程式に支配されて振動している板を考える。今、時刻 $t = 0$ において D 内の全ての点でたわみとたわみ速度が測定できた場合、時刻 $t = T$ までに領域 D 内の全ての点で振動をゼロにするにはどのような境界条件を与えたらよいだろうか? 本研究ではこの境界での厳密制御問題を Hilbert の一意性の方法 (Hilbert Uniqueness Method) を用いて軸対称な円形板の場合について数値的に解いた。数値解析手法は積分方程式法を用いた。HUM により求められる代数方程式を解く際、数値的不安定が起こり易く安定化の工夫が必要となったが、安定化手法として Tikhonov の正則化を用い、これに対処した。そして解析解の求められる場合には、解析解と数値解を比較することにより、精度の検討を行った。その結果として、積分方程式法を用いた HUM による板の振動制御問題の解法の有効性が示される。

2. 振動制御とは

運動方程式に従って振動 (運動) している板を考える。今、時刻 $t = 0$ において考えている領域 D のすべての点でたわみ w_0 とたわみ速度 w_1 (初期条件) が計測できたとする。この時、ある目標時間 T までに領域内の全ての点において、完全に振動 (運動) を静止させるように境界条件を適切に与えてやるのが本研究で定義する「振動制御」であり、この時の境界条件を「厳密制御 (コントロール)」と呼ぶ。本研究では、境界条件が「固定」の板の制御を考えるので、コントロールすべき量は境界でのたわみ w とたわみ角 $\partial w / \partial n$ ということになる。このような厳密制御は T の値が十分大きければ複数存在することが知られている。

3. HUMによる振動制御

まず、 $D \times (0 < t < T)$ において、次の初期値境界値問題 (以下、順方向問題と呼ぶ)

$$\begin{aligned} K \Delta^2 \phi(e_0, e_1) + \rho \ddot{\phi}(e_0, e_1) &= 0 \quad \text{in } D \times (0 < t < T) \\ \phi(e_0, e_1)|_{t=0} &= e_0, \quad \dot{\phi}(e_0, e_1)|_{t=0} = e_1 \quad \text{in } D \\ \phi(e_0, e_1) &= 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n}(e_0, e_1) = 0 \quad \text{on } \partial D \times (0 < t < T) \end{aligned} \quad (1)$$

の解 $\phi(e_0, e_1)$ を求める。ここで (e_0, e_1) は $e_0(\mathbf{x}) = 0$ ($\mathbf{x} \in \partial D$) を満たす D で定義された関数で、あとで決定される。この問題を解けば、 $[0 < t < T]$ において、境界での曲げモーメント及び反力が求まる。これらの量をそれぞれ $M_r^\phi(e_0, e_1)$, $Q_r^\phi(e_0, e_1)$ と表記する。次に、今得られた $M_r^\phi(e_0, e_1)$, $Q_r^\phi(e_0, e_1)$ を

$$w(e_0, e_1) = Q_r^\phi(e_0, e_1) \quad \frac{\partial w}{\partial n}(e_0, e_1) = -M_r^\phi(e_0, e_1)$$

として次の初期値境界値問題を $t = T$ から $t = 0$ まで「逆向き」に解く (以下、逆方向問題と呼ぶ)。即ち、

$$\begin{aligned} K \Delta^2 w(e_0, e_1) + \rho \ddot{w}(e_0, e_1) &= 0 \quad \text{in } D \times (T > t > 0) \\ w(e_0, e_1)|_{t=T} &= 0, \quad \dot{w}(e_0, e_1)|_{t=T} = 0 \quad \text{in } D \\ w(e_0, e_1) &= Q_r^\phi(e_0, e_1), \quad \frac{\partial w}{\partial n}(e_0, e_1) = -M_r^\phi(e_0, e_1) \quad \text{on } \partial D \times (T > t > 0) \end{aligned} \quad (2)$$

の解 $w(e_0, e_1)$ を求める。この解より、

$$w(e_0, e_1)|_{t=0}, \quad \dot{w}(e_0, e_1)|_{t=0}$$

が (e_0, e_1) の関数として求まる。もともと (e_0, e_1) というのは適当に与えた順方向問題の初期条件であるので、

$$w(e_0, e_1)|_{t=0} = w_0, \quad \dot{w}(e_0, e_1)|_{t=0} = w_1 \quad \text{in } D \quad (3)$$

を満たすような (e_0, e_1) を決定すれば、境界での制御は、

$$w(\mathbf{x}, t) = Q_r^\phi(e_0, e_1), \quad \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = -M_r^\phi(e_0, e_1), \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial D \times (0 < t < T)$$

として求まる。以上が HUM の概略である。

ある決められた時刻 T までに板の振動をゼロにする厳密制御は複数存在すると先に述べたが、HUM によって求められる制御は唯一に定まり、それは厳密制御の中である種のエネルギー

$$E = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial D} \{w(\mathbf{x}, t)\}^2 dS dt + \frac{c^2}{2} \int_0^T \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{x}, t) \right\}^2 dS dt \quad (4)$$

を最小にするようなものとなっている。ここに c は距離の次元をもつ量であり、本研究においては $c = 1$ としている。

4. HUMの積分方程式法への適用

前節で示されたように、HUMを用いて厳密制御問題を解くことは結局方程式(3)を解くことに帰着される。(3)を変分形式に書き直すと

$$\int_D \dot{w}(e_0, e_1)|_{t=0} f_0 dV - \int_D w(e_0, e_1)|_{t=0} f_1 dV = \int_D w_1 f_0 dV - \int_D w_0 f_1 dV \quad (5)$$

となる。ここに (f_0, f_1) は $f_0 = 0$ on ∂D を満たす D で定義されたテスト関数である。(5)をグリーンの公式を用いて境界型の方程式に書き直せば

$$\int_0^T \int_{\partial D} Q_r^\phi(f_0, f_1) Q_r^\phi(e_0, e_1) ds dt + \int_0^T \int_{\partial D} M_r^\phi(f_0, f_1) M_r^\phi(e_0, e_1) ds dt = \rho \int_D w_1 f_0 dV - \rho \int_D w_0 f_1 dV \quad (6)$$

となる。ここに $M_r^\phi(\cdot, \cdot)$, $Q_r^\phi(\cdot, \cdot)$ は括弧内を初期値とする順方向問題の解である。本研究では、積分方程式法は Q_r^ϕ, M_r^ϕ を求める際に用いている。また (e_0, e_1) を形状関数 $\mu_i(x)$ を用いて $(e_0, e_1) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x) E_i$ と離散化し $(f_0, f_1) = \mu_i(x)$ とすれば、変分方程式(6)は

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^T \int_{\partial D} Q_{rj}^\phi(x, t) Q_{rj}^\phi(x, t) dS dt + \int_0^T \int_{\partial D} M_{rj}^\phi(x, t) M_{rj}^\phi(x, t) dS dt \right\} \cdot E_j = \rho \int_D \mu_i(x) \cdot (w_1, -w_0) dV \quad (7)$$

と離散化される。(7)を E_j について解けば、求める境界制御は

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n Q_{ri}^\phi(x, t) \cdot E_i, \quad \frac{\partial w}{\partial n}(x, t) = - \sum_{i=1}^n M_{ri}^\phi(x, t) \cdot E_i \quad (x, t) \in \partial D \times (0 < t < T) \quad (8)$$

により計算できる。

5. Tikhonovの正則化を用いた安定化

HUMにより境界制御を求めることは(7)を解くことに帰着される。(7)を簡略化して表現すれば次のようになる。

$$A_{ij} E_j = B_i \quad (9)$$

ここに A_{ij} は正値対称行列である。ところが、このままの形で(9)を解くと得られる解 E_i が大きく振動し解が不安定になる場合がある。その様な場合には(9)の解である (e_0, e_1) を安定なものとするためにTikhonovの正則化を用いる。Tikhonovの正則化を用いる場合には(9)を

$$\left(A_{ij} + \varepsilon \int_D \nabla \mu_i \cdot \nabla \mu_j dV \right) E_j = B_i \quad (10)$$

と修正して解いた。ここに μ_i は (e_0, e_1) の形状関数であり $\nabla \mu_i$ とは μ_i の勾配を意味する。また、 ε は正則化パラメータであるが、 ε を大きくすればするほど正則化の効果が現れ解 E_i は滑らかなものとなるが、大きくし過ぎると代数方程式(9)の意味がなくなり精度が落ちる。

6. 数値計算結果

正則化パラメータ ε の値を3通り変化させてHUMにより数値的に境界制御を計算し、それを境界条件として初期値境界値問題を解いた場合の領域中央でのたわみの計算結果を示す。

× : 数値解
実線 : 解析解

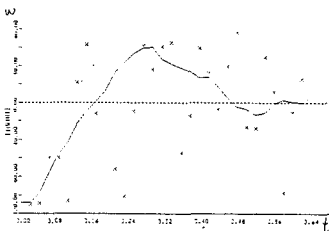


Fig.1 $\varepsilon = 0$ としてコントロールを行った場合の領域の中心点でのたわみ

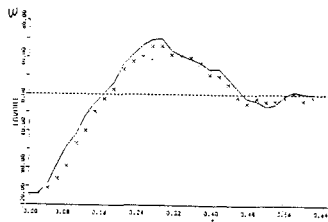


Fig.2 $\varepsilon = 10^{-2}$ としてコントロールを行った場合の領域の中心点でのたわみ

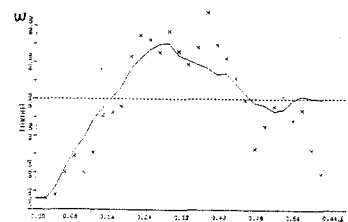


Fig.3 $\varepsilon = 1.0$ としてコントロールを行った場合の領域の中心点でのたわみ

これらの図より $\varepsilon = 10^{-2}$ とした時には領域中央でのたわみがかなり精度よくコントロールされており、本研究で採用した手法の有効性を示唆している。