土木学会第48回年次学術講演会（平成５年９月）

I－629

積分方程式法と HUM による薄膜の振動制御

運輸省港湾技術研究所　正会員　野津 厚
京都大学土木工学科　正会員　小林昭一
京都大学土木工学科　正会員　西村直志

1. はじめに

振動する薄膜の変位と変位速度が時刻 $t=0$ において観測されたとき、境界での変位を制御することによって与えられた時刻 $t=T$ までに振動を完全にストップさせることはできるであろうか。このような問題は波動方程式の Dirichlet 制御問題として定式化されるが、その一般的な解法として Hilbert の一意性の方法（Hilbert Uniqueness Method,HUM）がある。HUM の数値解法として積分方程式法が有効であることは、円形領域で軸対称な初期条件の場合について、すでに実証されている。本論文ではこれを円形領域で非軸対称な初期条件の場合に拡張する。その際、自由度の増加にともなって解の不安定が生じるが、Tikhonov の正則化を用いると良好な解が得られる。

2. HUM

波動方程式の Dirichlet 制御問題とは波動方程式 $\Delta u - \ddot{u} = 0 \quad \text{in} \quad D \times (t > 0)$ を初期条件 (u_0, u_1) の下で解いたときの解 u が、あたえられた時刻 $T(>0)$ において $u|_T = 0,\ \dot{u}|_T = 0 \quad \text{in}\ D$ をみたすように Dirichlet data $g\ \ on\ \ \partial D \times (0 < t < T)$ を決定することである。ここに D は、R^2 における十分なめらかな境界 ∂D でかこまれた領域であるとする。また (u_0, u_1) は D で定義された関数、g は $\partial D \times (t > 0)$ で定義された関数である。 $\dot{}$ は時間 t に関する微分である。

このような制御 g は十分大きな T にたいしては存在することがしられている。ただし解の一意性はない。

Hilbert の一意性の方法（Hilbert Uniqueness Method, HUM）を用いるとこのような解の一つを求めることができる。以下、この方法について説明する。まず、つぎのような波動方程式の初期値境界値問題を解く。

$$\Delta\psi - \ddot{\psi} = 0 \quad \text{in} \quad D \times (0 < t < T)$$

$$\psi|_{t=0} = e_0, \ \ \dot{\psi}|_{t=0} = e_1 \quad \text{in} \quad D$$

$$\psi = 0 \quad \text{on} \quad \partial D \times (0 < t < T)$$

ここに (e_0, e_1) は $e_0 = 0$ on ∂D をみたす D で定義された関数である。この問題を、以後、順方向問題とよぶことにする。順方向問題を解けば、$\partial D \times (0 < t < T)$ において $\partial\psi/\partial n(e_0, e_1)$ がもとまる。ここに $\partial/\partial n$ は法線微分を表す。つぎに、得られた $\partial\psi/\partial n(e_0, e_1)$ を Dirichlet data として、次のような初期値境界値問題を解く。

$$\Delta u - \ddot{u} = 0 \quad \text{in} \quad D \times (0 < t < T)$$
$$u|_{t=T} = 0, \ \ \dot{u}|_{t=T} = 0 \quad \text{in} \quad D$$
$$u = \frac{\partial\psi}{\partial n}(e_0, e_1) \quad \text{on} \quad \partial D \times (0 < t < T)$$

この問題を、以後、逆方向問題とよぶことにする。これを解けば、$u(e_0, e_1)|_{t=0},\ \ \dot{u}(e_0, e_1)|_{t=0}$ が (e_0, e_1) の関数としてもとまる。あとは (e_0, e_1) に関する方程式

$$u(e_0, e_1)|_{t=0} = u_0, \ \ \dot{u}(e_0, e_1)|_{t=0} = u_1 \ \ in \ \ D \tag{1}$$

を解けば、制御は $g = \frac{\partial\psi}{\partial n}(e_0, e_1) \ \ on \ \ \partial D \times (0 < t < T)$

3. HUM の数値解法

つぎに積分方程式法を用いた HUM の数値解析法について述べる。まず、方程式 (1) を変分形式に書きかえる。

$$\int_D \dot{u}(e_0, e_1)|_{t=0} f_0 dV - \int_D u(e_0, e_1)|_{t=0} f_1 dV = \int_D u_1 f_0 dV - \int_D u_0 f_1 dV \tag{2}$$

ここに (f_0, f_1) は $f_0 = 0 \ \ on \ \ \partial D$ をみたす D で定義された任意の関数である。つぎに、変分方程式 (2) の左辺を部分積分とガウスの発散定理を用いて変形するとし、次式を得る。

$$\int_0^T \int_{\partial D} \frac{\partial\psi}{\partial n}(f_0, f_1) \frac{\partial\psi}{\partial n}(e_0, e_1) dS dt = \int_D u_1 f_0 dV - \int_D u_0 f_1 dV \tag{3}$$

つぎに (e_0, e_1) を離散化する。領域 D 内を要素分割して、e_0 の各節点での値を $E_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ 、対応する形状関数を $M_i(\boldsymbol{x})(i = 1, 2, \ldots, m)$ 、e_1 の各節点での値を $E_i \quad (i = m+1, \ldots, n)$ 、対応する形状関数を $Ni(\boldsymbol{x})(i = m+1, \ldots, n)$ 　とする。また、

$$\mu_i = \begin{cases} (M_i(\boldsymbol{x}), 0) & i = 1, 2, \ldots, m \\ (0, N_i(\boldsymbol{x})) & i = m+1, m+2, \ldots, n \end{cases}$$

とする。また μ_i を初期条件として順方向問題を解いたときの解の法線微分を $\partial\psi_i/\partial n \;\; on \;\; \partial D \times (0 < t < T)$ と書くことにする。これを使うと

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(e_0, e_1) = \sum_{i=1}^{n} E_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \tag{4}$$

と書ける。というのは、順方向問題では解は初期条件に対して線形であるからである。Galerkin 法により方程式 (3) は次のように離散化される。

$$A_{ij} E_j = B_i \tag{5}$$

ここに

$$A_{ij} = \int_0^T \int_{\partial D} \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \frac{\partial \psi_j}{\partial n} dS dt, \quad B_i = \int_D \mu_i \cdot (u_1, -u_0) dV$$

であり、・は内積を表す。この代数方程式を E_j について解けば求める制御は式 (4) により求まる。この係数行列に含まれる $\partial\psi_i/\partial n$ を求めるのに、積分方程式法を使うのである。

4. 解の不安定と Tikhonov の正則化

以上に述べた積分方程式法による数値解法を、円形領域で非軸対称な初期条件の場合に適用すると、領域の分割の仕方によっては (e_0, e_1) が正しく求まらない場合がでてくる。これは解の不安定がおきているためであると思われる。そこで Tikhonov の正則化により安定化を試みる。それには代数方程式 (3-8) のかわりに代数方程式、

$$(A_{ij} + \varepsilon C_{ij}) E_j = B_i$$

を解けばよい。ここに

$$C_{ij} = \int_D \nabla \mu_i \cdot \nabla \mu_j dv$$

であり、εは正の微小量である。

5. 数値計算例

つぎに領域としては半径 r_0の円を考え、HUM の非軸対称な解析解が容易に求まる場合について、積分方程式法による (e_0, e_1) の数値解と解析解の比較を行い、積分方程式法が HUM の数値解法として有効であることを示す。fig.1 が解の不安定の例である。Tikhonov の正則化をとりいれ安定化をはかった結果が fig.2 から fig.4 である。$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-4}$ のとき正則化の効果が十分でなく解はやや不安定である。$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ のとき数値解と解析解は最もよく一致している。$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-2}$のとき、解くべき代数方程式の係数行列が意味をなさなくなり、精度が落ちる。このように正則化パラメータの値は、小さすぎれば数値的不安定が抑制できず、大きすぎれば精度が落ちるので、適切に決められなければならない。

6. 終わりに

以上のことからつぎのように結論できる。積分方程式法を用いて HUM の数値解を求める方法は、円形領域で軸対称な初期条件の場合のみならず、非軸対称な初期条件の場合にも有効である。ただし領域の分割のしかた、形状関数のとりかたによって、解の不安定が生じる場合がある。そのような場合の安定化の手法として、Tikhonov の正則化は非常に有効である。

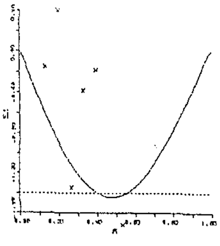
fig.1

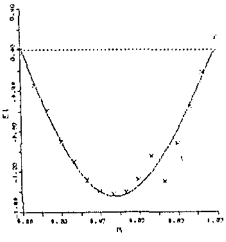
fig.2

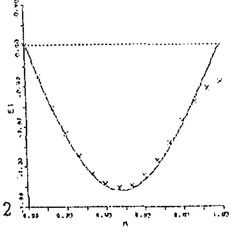
fig.3

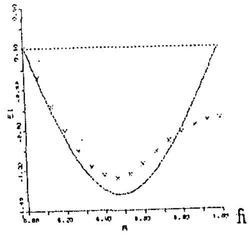
fig.4