

1. はじめに

これまで棒部材の動的解析は広く行われており、その手法に注目すると、空間固定座標系を用いるか、あるいは物体の変形と共に動く移動座標系を用いるかに大別できる。それぞれの利点は既に述べられているように [1]、慣性項は空間固定座標系を用いれば簡潔な表現となり、一方内力仕事は移動座標系を用いることにより簡単でかつ高精度の表現が得られる。ここでは、これらの利点を活かした新しい手法を提案する。

まず、動的解析の出発点である Hamilton の原理を考えると、Lagrange 関数は、物体の全歪エネルギーと運動エネルギー、及び外力のポテンシャルエネルギーとの3つの関数より成り立っている。これらは本来不変量であることから、どの座標系を用いて表しても良く、全てを同一の座標系により表す必要はない。すなわち、物体の全歪エネルギーを移動座標系で、物体の運動エネルギーと外力のポテンシャルエネルギーを空間固定座標系で表せば簡潔な表現式となることが期待できる。更に、本来ならば統一された変位場を用いる所を、それぞれ別の変位場を用いることにより、簡潔で精度の良いエネルギー表現が得られる可能性もある。ここでは、Timoshenko 梁の平面問題を例にとり、上記の考え方に従って動的解析の定式化を示す。

2. Timoshenko 梁の定式化

2.1 運動エネルギー

図1に示す記号を用いると、ベクトル $\{E_1, E_2\}$ と $\{I_1, I_2\}$ 及び $\{a_1, a_2\}$ と $\{I_1, I_2\}$ との関係は、以下のよう求める。

$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Phi_0 & \sin \Phi_0 \\ -\sin \Phi_0 & \cos \Phi_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi \\ -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

棒材の任意点の位置ベクトルは次式のように書ける。

$$r = R_i + \xi E_1 + K + \eta a_2 \quad (2)$$

ここに、 R_i は節点 i の変形前の位置ベクトル、 $K (= U I_1 + V I_2)$ は棒軸の変位ベクトル、 ξ, η は埋込み座標系を示す。

運動エネルギーはその定義より

$$T = \frac{1}{2} \int m(\dot{r} \cdot \dot{r}) dV \quad (3)$$

と書け、ここに m は単位体積当たりの質量である。

式(1),(2)より式(3)は

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l [A_p(\dot{U})^2 + A_p(\dot{V})^2 + I_p(\dot{\Phi})^2] d\xi \quad (4)$$

となり、ここに $A_p = \int m dA$ 、 $I_p = \int m \eta^2 dA$ である。Timoshenko 梁の場合には、移動座標系で一次の変位関数を用いれば、厳密な座標変換を行うことにより、空間固定座標系の変位場も一次関数となる。よってここでは、通常用いられている一次関数により、以下の変位場を仮定する。

$$U = (1-S)U_i + S U_j, \quad V = (1-S)V_i + S V_j, \quad \Phi = (1-S)\Phi_i + S \Phi_j \quad (5)$$

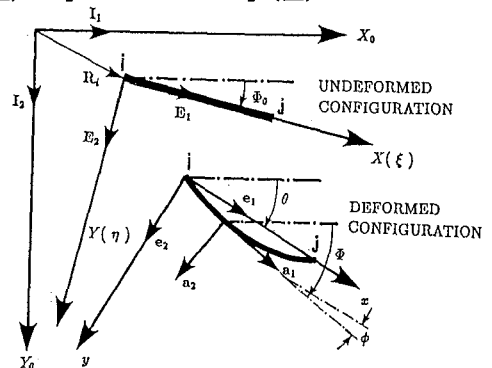


Fig.1 Kinematics of Timoshenko's beam

ここに、 $S = \xi/l$ 、 $(\cdot)_i$ と $(\cdot)_j$ はそれぞれ節点 i, j の量である。式(5)を式(4)に代入することにより、一般に知られている整合質量マトリックス $[M_e]$ を用いて、運動エネルギーは以下のように表される。

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{D}_e\}^T [M_e] \{\dot{D}_e\} \quad (6)$$

ここに、 $\{D_e\} = \{U_i, V_i, \Phi_i, U_j, V_j, \Phi_j\}^T$ である。

2.2 歪エネルギー

Timoshenko 梁の歪エネルギーは

$$\Pi_S = \frac{1}{2} \int_0^l [EA(\varepsilon)^2 + EI(\kappa)^2 + GA(\gamma)^2] d\xi \quad (7)$$

と表される。空間固定座標系を用いて Π_S を評価すると、周知のように、高度な棒理論が必要となる。一方、移動座標系を用いた場合には、線形の歪・変位関係式を用いても高精度の結果が得られることが知られている。さて、式(5)の変位関数と、線形の歪・変位関係式を用いて式(7)を厳密に積分すると、いわゆるロッキング現象が表れるため、通常は低減積分を用いて Π_S を計算する場合が多い。しかしながら、この方法では、細長比が大きい場合に、解の収束が遅くなることから[1]、ここでは別の方法を用いることにする。

移動座標系においては、Timoshenko 梁の挙動は線形であり、更に分布荷重は作用しないものと仮定すれば、厳密解は簡単に得られ、これより Π_S は以下のように表される。

$$\Pi_S = \frac{1}{2} \{d_e\}^T [K_0] \{d_e\} \quad (8)$$

ここに $[K_0]$ は周知の線形剛性マトリックスであり、 $\{d_e\} = \{\phi_i, u_j, \phi_j\}^T$ である。式(8)を用いることにより、何の操作もせずにロッキング現象を回避できることは明かであろう。さて、 $\{d_e\}$ と $\{D_e\}$ との関係は

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ u_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_i - \theta \\ (U_j - U_i + l \cos \Phi_0) \cos \theta + (V_j - V_i + l \sin \Phi_0) \sin \theta - l \\ \Phi_j - \theta \end{Bmatrix} \quad (9)$$

と求まり、これを $\{d_e\} = \{d_e(D_e)\}$ と書く。これより式(8)は空間固定座標系の成分により以下のように表せる。

$$\Pi_S = \frac{1}{2} \{d_e(D_e)\}^T [K_0] \{d_e(D_e)\} \quad (10)$$

2.3 外力のポテンシャルエネルギー

保存系の外力が作用するものと仮定すれば、通常の手法に従い、節点外力のみを考えることにより、外力のポテンシャルエネルギーは空間固定座標系の成分により以下のように書ける。

$$\Pi_f = -P_i U_i - P_j U_j - Q_i V_i - Q_j V_j - M_i \Phi_i - M_j \Phi_j \quad (11)$$

2.4 運動方程式

全節までで求められたエネルギーは全て空間固定座標系の成分により表されており、これらを用いて Hamilton の原理は次のように書ける。

$$\delta H = 0, \quad H = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi_S - \Pi_f) dt \quad (12)$$

これより、Timoshenko 梁の運動方程式として以下の式を得る。

$$[M_e] \{\ddot{D}_e\} + [L_T]^T [K_0] \{d_e(D_e)\} - \{F_e\} = \{0\} \quad (13)$$

ここに、 $\{\delta d_e\} = [L_T] \{\delta D_e\}$ 、 $\{F_e\} = \{P_i, P_j, \dots, M_j\}^T$ である。式(13)は通常の2階の微分方程式であり、様々な方法により積分することができる。

数値結果は紙面の都合上省略し、発表当日に示す。

3. 参考文献

[1] M. Iura : Finite Element Formulation for Dynamic Analysis of Planar Flexible Beams with Finite Rotations, 1993 ASME International Computers in Engineering Conference.