Ⅰ－627　直接時間積分α-法の非線形解式への適用に関する基礎的検討

東京工業大学工学部　正員　　吉田　裕
東京工業大学大学院　学生員　○魚地征一郎

１．はじめに

有限要素法による非線形解析の実用面においてはスキームの安定性が解析の要となり、動的な解析においては採用する直接時間積分法の基本的な特性が要件となる。

本研究は、Hilber-Hughes-Taylorによって提案され[1]、その有効性が認められて汎用コードなどに広く採用されているα-法の振幅および周期の評価特性を再確認し、本来線形の運動方程式の解法として与えられているα-法に準拠して構成した、Newton-Raphson形の非線形問題の解式を提案し、具体的な数値例によってその得失を議論するものである。

２．α-法の概要

α-法は、対象としている現象の評価に対してはほとんど影響を及ぼさないが、積分計算の安定性の上では決定的な要因となる高い振動数成分を、アルゴリズムの上で数値的に減衰させることを目的として、対象とする運動方程式を式(1)の形で考慮し、Newmark-β法の公式（式(2),(3)）と組み合わせて用いることによって、得られる解式の特性の選択幅を広げた方法である。

$$[M]\{\ddot{u}_{n+1}\}+(1+\alpha)[K]\{u_{n+1}\}-\alpha[K]\{u_n\}=\{f_{n+1}\} \qquad -(1)$$

$$\{u_{n+1}\}=\{u_n\}+\Delta t\{\dot{u}_n\}+\Delta t^2\{(1/2-\beta)\{\ddot{u}_n\}+\beta\{\ddot{u}_{n+1}\}\} \qquad -(2)$$

$$\{\dot{u}_{n+1}\}=\{\dot{u}_n\}+\Delta t\{(1-\gamma)\{\ddot{u}_n\}+\gamma\{\ddot{u}_{n+1}\}\} \qquad -(3)$$

３．α-法の評価特性について

多自由度系を対象として式(1)～(3)で構成される積分漸化式の基本的な特性は、一般性を失うことなく、１自由度系を対象として議論することができる。α-法の積分漸化式は次式のように与えられる。

$$\{X_{n+1}\}=[A]\{X_n\} \quad , \quad \{X_n\}=\langle u_n \quad \Delta t\cdot\dot{u}_n \quad \Delta t^2\cdot\ddot{u}_n\rangle^T \qquad -(4),(5)$$

$$[A]=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} D-\beta\Omega^2 & 1 & 1/2-\beta \\ -\gamma\Omega^2 & D-(1+\alpha)\gamma\Omega^2 & D-\gamma-\gamma(1+\alpha)\Omega^2/2 \\ -\Omega^2 & -(1+\alpha)\Omega^2 & D-1-(1+\alpha)\Omega^2/2 \end{bmatrix} \qquad -(6)$$

$$D=1+(1+\alpha)\beta\Omega^2 \ , \ \Omega=\omega\cdot\Delta t \ , \ \omega=(K/M)^{1/2}$$

作用素［A］の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が複素共役根$\lambda_{1,2}$を持ち、$\omega\cdot\Delta t$の値に依らず$|\lambda_3|<|\lambda_{1,2}|\leqq 1$ を満たす、無条件に安定であるための条件などから、α-法においては $-1/3\leqq\alpha\leqq 0$ の範囲のαの値を用い、$\beta=(1-\alpha)^2/4$ および $\gamma=1/2-\alpha$ を満たすβ，γの値のもとで用いることが提示されている。

α-法の特性については当該文献[1]中で相当議論されているところであるが、さらにαの値のとり方によって、振幅の評価に対応するスペクトル半径ρ（$\rho=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|\}$）および周期の評価に対応するT／T*（T：目標とする周期，T*：作用素［A］によって得られる周期）がω・⊿ｔの値によってどのようになるかを検討し、図示したものが図-１である。

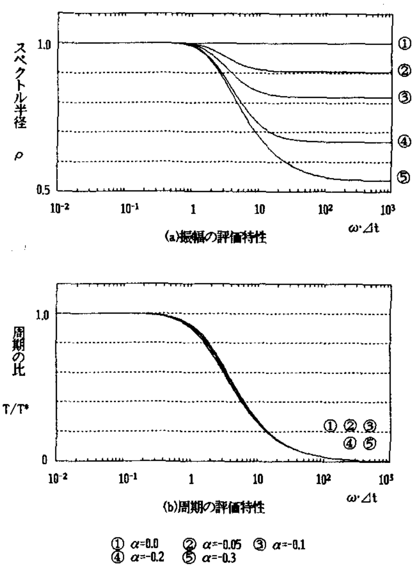


図-1　αの値のとり方による振幅および周期の評価特性

４．α-法に準拠して提案する動的大変形問題の解式

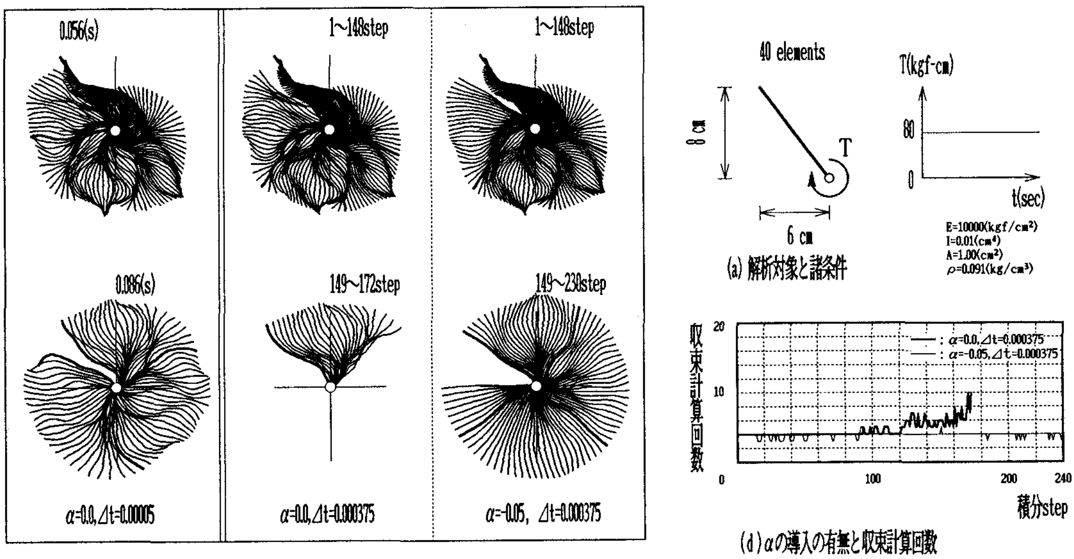
Newton-Raphson形の解式にα-法を適用して構成される、下記の収束計算のアルゴリズムを提案する。

$$\begin{aligned}\left[(1+\alpha)[K_{T<j-1>}]+\frac{1}{\beta\Delta t^2}[M]+\frac{\gamma}{\beta\Delta t}[C]\right]\{\Delta u^{<j>}\}&=\{f_{(t+\Delta t)}\}-\{f_{int(t+\Delta t)<j-1>}\}\\&-[M]\left\{\frac{1}{\beta\Delta t^2}\{\Delta u_{<j-1>}\}-\frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{u}_{(t)}\}-\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\{\ddot{u}_{(t)}\}\right\}\\&-[C]\left\{\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{\Delta u_{<j-1>}\}+\left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)\{\dot{u}_{(t)}\}+\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\{\ddot{u}_{(t)}\}\right\}\end{aligned}\qquad -(7)$$

ここに $\{\Delta u_{<j>}\}$ は収束計算過程における節点変位増分の第<j>近似値、$\{\Delta u^{<j>}\}$ は第<j-1>近似値と第<j>近似値の差を意味する。

５．数値例による検証

図-２(b)は、真っ直ぐな柔らかい棒(a)が一端にトルクを受けて変形しながら回転する際の時々刻々の変形形状の推移をパラメータαを採用しない場合（通常のNewmark-β法に相当する）と採用した場合を比較して示したものである。



(a) 解析対象と諸条件

(d) αの導入の有無と収束計算回数

(b) 小さな時間増分の下での結果　　(c) αの導入の有無と変形形状

図-２ 異なったパラメータ条件のもとでの変形形状の推移と収束に要した計算回数

６．おわりに

以上に、動的大変形問題を対象とした収束計算の安定性を向上する方法を提案した。図-２に示した解析例からパラメータαを式(6)の形で導入することにより安定性が相当改善されることが分かる。しかし、それぞれのパラメータ条件に基づいて得られる変形形状を比較すれば容易に判断されるように、得られる解の精度に影響が及ぼされることも事実である。

参考文献

1)Hilber,H.M, Hughes,T.J.R. and Taylor,R.L. : Improved Numerical Dissipation For Time Algorithms In Structual Dynamics , Earthquake Engineering and Structual Dynamics , Vol5 ,283-292(1977)

2)吉田　裕，原田　恒樹：有限要素法による非線形動解析の時間積分スキームに関する一検討，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集　第14巻，日本鋼構造協会，平成２年７月

3)吉田　裕：有限要素運動方程式の時間積分法　連載講座「構造工学における有限要素法の理論と応用」，JSSC, VOL.21, NO.227・1985年9月