I－626　側圧を受ける上端自由下端単純支持された円筒シェルの座屈固有値解析のための係数行列作成手法

武蔵工業大学　学生員　小川研一
武蔵工業大学　正会員　増田陳紀
武蔵工業大学　正会員　西脇威夫

１．はじめに

海中ケーソンや地中タンクなどの側圧を受ける大型土木構造物に薄肉円筒シェル構造が用いられることがある．これらの構造物の，設計・架設に際しては，座屈に対する安全性を検討しておくことが重要である．側圧が作用する円筒シェルの座屈耐力については，上下端で対称な支持条件に対してのみこれまでに研究成果【１】～【３】が報告されている[4]．しかし，上述したような実構造物を想定した場合には，必ずしもこのような境界条件を適用した検討のみでは十分とは言えず，上端自由下端単純支持の境界条件などその他の条件下での座屈耐力の検討も必要と思われる．

両縁端部の境界条件が異なる静水圧下の円筒シェルの座屈耐力を固有値解析で求めようとする場合，変位の円周方向分布が軸方向に変化することが予測される．このため軸方向と周方向の波形の連成を無視した単純な座屈波形の設定が困難であり，変位の二重級数展開が必要となって，比較的大きな次元の固有値問題を扱うこととなる．本研究では側圧を受ける上端自由下端単純支持された円筒シェルの問題に対し，固有値解析のための系統的な係数行列作成手法を提案する．基礎となるポテンシャルエネルギ式には，植村・森田の式[3]を用いている．

２．上端自由下端単純支持された円筒シェルの座屈変位の仮定

変位の円周方向分布が軸方向に変化することを考慮した変位分布を次式のように仮定する．ただし，ｕ，ｖ，ｗは，各々ｘ，ｙ，ｚ方向の変位であり，ｘ，ｙ，ｚ座表系は図-１に示すものとする．ここで，Ｌ，Ｒ，ｔは，円筒高さ，半径および板厚である．また，A_{mn}，B_{mn}，C_{mn}は，未定係数である．

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin(mY)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}X\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\,u_{mn}$$

$$v=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\cos(mY)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}X\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\,v_{mn}$$

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\sin(mY)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}X\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\,w_{mn}$$

$$\text{ただし}\quad X=\frac{x}{L}\ ,\quad Y=\frac{y}{R}\qquad\cdots\cdots(1)$$

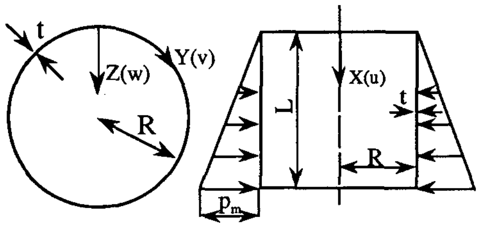

図-1　座標系および構造諸元

３．全ポテンシャルエネルギ

基礎となる全ポテンシャルエネルギΠは，植村・森田の式[3]を用いる．これは，座屈前のひずみは円形断面を保ったまま軸対称に変形を生じるものとして求め，座屈後のひずみは座屈前の状態を基準として周方向に波を生じつつ半径方向にたわんだときの付加的変位成分を仮定して求めている．ここで，全ポテンシャルエネルギΠを以下に示す．

（添え字x，yは，x，yに関する微分を意味する）

$$\begin{aligned}\Pi=&\left[\frac{Et}{2(1-\nu^2)}\right]\int_0^{2\pi R}\int_0^{L}\left[u_x^{\,2}+v_y^{\,2}+\left(\frac{w}{R}\right)^2+2\nu u_x v_y-2\nu u_x\left(\frac{w}{R}\right)-\underline{2v_y\left(\frac{w}{R}\right)}\right]dx\,dy\\&+\left[\frac{Et^3}{24(1-\nu^2)}\right]\int_0^{2\pi R}\int_0^{L}\left[w_{xx}^2+w_{yy}^2+\left(\frac{w}{R^2}\right)^2+2\frac{ww_{yy}}{R^2}-2\nu w_{xx}\left\{w_{yy}+\left(\frac{w}{R^2}\right)\right\}+2(1-\nu)\,w_{xy}^{\,2}\right]dx\,dy\\&+\left[\frac{Et}{4(1+\nu)}\right]\int_0^{2\pi R}\int_0^{L}\left(u_y+v_x\right)^2dx\,dy+\frac{R}{2}\int_0^{2\pi R}\int_0^{L}p\left[-w_y^{\,2}-2w_y\left(\frac{v}{R}\right)+\left(\frac{w}{R}\right)^2+\frac{1}{R}\left(w_xu+w_yv-v_yw-u_xw\right)\right]dx\,dy\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(2)$$

4．係数行列の作成

植村・森田の全ポテンシャルエネルギΠは変位成分（またはその一次，二次導関数）に関する二次式で表わされる．Πに式(1)を代入し，未定係数に対する停留条件

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{11}}=\frac{\partial \Pi}{\partial A_{12}}=\cdots=\frac{\partial \Pi}{\partial A_{m1}}=\cdots=0 \quad \frac{\partial \Pi}{\partial B_{11}}=\frac{\partial \Pi}{\partial B_{12}}=\cdots=\frac{\partial \Pi}{\partial B_{m1}}=\cdots=0 \quad \frac{\partial \Pi}{\partial C_{11}}=\frac{\partial \Pi}{\partial C_{12}}=\cdots=\frac{\partial \Pi}{\partial C_{m1}}=\cdots=0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

を求めれば，未定係数についての同次方程式が得られる．同次方程式の係数行列を次式(4)のKmnのような小行列に分け，それぞれの小行列についてその成分を直接的に求めることを考える．

$$\begin{Bmatrix} \partial\Pi/\partial A \\ \partial\Pi/\partial B \\ \partial\Pi/\partial C \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(4)$$

$$A=\left(A_{11},A_{12},\cdots\cdots,A_{m1},\cdots\cdots\right)^T, B=\left(B_{11},B_{12},\cdots\cdots,B_{m1},\cdots\cdots\right)^T, C=\left(C_{11},C_{12},\cdots\cdots,C_{m1},\cdots\cdots\right)^T$$

ここで，具体的な例としてK13を取り上げ考える．K13を構成する成分は，式(3)のうち

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{11}}=\frac{\partial \Pi}{\partial A_{12}}=\cdots=\frac{\partial \Pi}{\partial A_{m1}}=\cdots=0 \qquad \cdots\cdots(5)$$

によって求まった同次方程式のCijの係数であることから，ΠのうちAij，Cklを含む項，すなわちvy w（式(2)の下線部の項）についてのみ考えればよい．K13の成分を $k^{13}_{ij,kl}$ とすると式(5)の形に表わすことができる．

$$\begin{aligned} k^{13}_{ij,kl}&=\alpha\int_0^{2\pi}\int_0^1 v_{y\,ij}\ w_{kl}dX\,dY \qquad \alpha：定数 \\ &=\alpha\left(-\frac{i}{R}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^1\left\{\sin(iY)\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2}X\right)\right\}\left\{\sin(kY)\cos\left(\frac{(2l-1)\pi}{2}X\right)\right\}dX\,dY \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(6)$$

さらに三角関数の直交性を利用し積分を実行するとK13の成分は次式のように求まる．

$$k^{13}_{ij,kl}=\begin{cases} \alpha\left(-\dfrac{i}{R}\right)\dfrac{\pi LR}{2} & (i=k,j=l) \\ 0 & (i=k,j\neq l) \\ 0 & (i\neq k,j=l) \\ 0 & (i\neq k,j\neq l) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(7)$$

式(7)よりK13の成分$k^{13}_{ij,kl}$ は，i,j,k,lで表わされ，実際の計算において取り込む項数を変化させていく場合，i,j,k,lの値を変えることで容易に成分を追加していくことができる．

同様に他の小行列Kmnについてもi,j,k,lで表わすことができ，これらの小行列Kmnから係数行列が求まる．

5．おわりに

側圧を受ける上端自由下端単純支持された円筒シェルの問題に対し，古典的ではあるが固有値解析のための係数行列作成手法を示した．この手法を用いることにより，実計算において座屈変位成分の取り込む項数を変化させていく場合，容易に係数行列の成分を求めることができる．また，上述した境界条件と異なる問題については，仮定する座屈変位成分を変える必要があるが，この手法を用いることで同様にして，系統的に係数行列を求めることができる．

【参考文献】

1）八巻昇：円筒殻の外圧による座屈に及ぼす座屈前変形の影響，東北大学高速力学研究所報告，第25巻，第259号，pp.153-175,1969/1970.
2）八巻昇：円筒殻の外圧による座屈，東北大学高速力学研究所報告，第24巻，第236号pp.3755,1968／1969.
3）植村益次・森田道子：直線的に変化する外圧による円筒殻の座屈，日本機械学会論文集（第1部），37巻，298号， pp.1100-1106,1971.6.
4）土木学会鋼構造委員会：座屈設計ガイドライン-第１３章パイプおよびシェル-，鋼構造シリーズ２　土木学会，p.324,1987.