土木学会第48回年次学術講演会（平成５年９月）

I－624　対称構造物のブロック対角化手法の回転変位への拡張

和歌山高専 土木工学科　正会員○ 有尾　一郎
東北大学 土木工学科　正会員　池田　清宏
京都大学 数理解析研　正会員　室田　一雄

1　はじめに

場の対称性を利用する研究は，理工学の分野では幅広く行なわれており，対称性の記述や利用の一般原理が**ブロック対角化法**により確立されている．構造解析の分野でも対称な系の釣合方程式を，その構造物独特の対称性を張る空間へ座標変換し，独立な方程式に分離できることが知られてきている [1], [2], [3]．しかし，これまでは主として並進変形に対する対称性の記述しかされておらず，一般の対称構造物の解析に拡張するにあたり，回転変形に対する対称性の記述が不可欠である．著者らは並進変位と回転変位の対称性の相互関係を**群の表現論**を用いて調べることにより，並進変位の座標変換行列をもとに回転変位の座標変換行列を求める方法を提案する．

2　釣合方程式の群共変性

正 n 角形状の対称性（D_n−**不変性**）を持つ構造物を考える．この構造物の釣合式 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ の共変性は，

$$T(g)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{F}(\tilde{T}(g)\boldsymbol{f}, T(g)\boldsymbol{u}),\ g \in D_n$$

により表される．ここに，$\boldsymbol{f}$ は荷重項を，$\boldsymbol{u}$ は回転変形を含む変位項を表わし，$T(g)$ と $\tilde{T}(g)$ は，変換元 g が作用する座標変換の仕組みを行列表示したもので，**表現行列**と呼ばれる．**二面体群** D_n の**既約表現**全体を

$$R(D_n) = \{\mu \equiv (d,j) \mid j = 1,\cdots,m_d; d = 1,2\}$$

と表すことにする．d は既約表現 μ の次数を表し，j は j 番目の d 次既約表現を意味する．また m_d は同値でない d 次既約表現の個数である．

釣合方程式を各既約表現毎に分解する座標変換行列を

$$\begin{aligned} H &\equiv [\cdots, H^{\mu}, \cdots] \\ &= [\ H^{(1,1)},\ \cdots, H^{(1,m_1)}, \\ &\quad\ H^{(2,1)},\ \cdots, H^{(2,m_2)}, \\ &\quad\ H^{(2,1)-}, \cdots, H^{(2,m_2)-}\ ] \end{aligned}$$

と定義する．ここに $H^{(1,j)}$ は１次既約表現 $(1,j)$ に対応する部分ブロック行列を，$H^{(2,j)}$ と $H^{(2,j)-}$ は２次既約表現 $(2,j)$ に対応する部分ブロック行列をそれぞれ表す．この座標変換行列 H を用いると，剛性行列を

$$\begin{aligned} \tilde{K}_e &= H^T K_e H = \mathrm{diag}[\cdots, \tilde{K}_e^{\mu}, \cdots] \\ &= \mathrm{diag}[\tilde{K}_e^{(1,1)},\ \cdots, \tilde{K}_e^{(1,m_1)}, \\ &\qquad \tilde{K}_e^{(2,1)},\ \cdots, \tilde{K}_e^{(2,m_2)}, \\ &\qquad \tilde{K}_e^{(2,1)},\ \cdots, \tilde{K}_e^{(2,m_2)}\ ] \end{aligned}$$

とブロック対角化できる．ここに $\mathrm{diag}[\cdots]$ はブロック対角行列を表す．２次既約表現には２個の同一の対角ブロックが対応する．

3　回転変位の座標変換行列

並進変位ベクトル$\boldsymbol{v}$と回転変位ベクトル$\boldsymbol{\theta}$から成立つ変位ベクトル

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix}$$

を考える．

この並進変位$\boldsymbol{v}$と回転変位$\boldsymbol{\theta}$に対する表現行列は

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_v(g) & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & T_\theta(g) \end{pmatrix},\ g \in D_n$$

と直和の形に分解できる．

節点変位に**回転対称操作**（ $g = r$ ）が及ぼす作用を図１に，**鏡映操作**（ $g = s$ ）が及ぼす作用を図２に示す．回転変換 r は並進変位と回転変位に同一の作用を及ぼすが，鏡映変換 s は両者が互いに異なる作用を及ぼしている．rと s に関する両者の表現行列の間には，

$$\begin{aligned} T_\theta^{\mu}(g) &= \sigma(g)T_v^{\mu}(g) = T_v^{\overline{\mu}}(g),\ g \in D_n \\ \sigma(g) &= \begin{cases} 1, & g = r \\ -1, & g = s \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

という関係が得られる．ここで，μ と $\bar{\mu}$ はそれぞれ $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{\theta}$ の既約表現を表わし，**表 1** に示す対応関係を持つ．

表 1　既約表現 μ と $\bar{\mu}$ の関係

1 次既約表現		2 次既約表現	
μ	$\bar{\mu}$	μ	$\bar{\mu}$
$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,1)$
$(1,2)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(2,2)$
$(1,3)$	$(1,4)$	$\vdots$	$\vdots$
$(1,4)$	$(1,3)$	$(2,m_2)$	$(2,m_2)$

この関係に式 (1) のような考察を加えることにより，並進と回転変位間の各既約表現に対する座標変換行列間の関係式

$$\begin{aligned} H_\theta^{(1,1)} &= H_v^{(1,2)} \quad , \quad H_\theta^{(1,2)} = H_v^{(1,1)}, \\ H_\theta^{(1,3)} &= H_v^{(1,4)} \quad , \quad H_\theta^{(1,4)} = H_v^{(1,3)}, \\ H_\theta^{(2,j)} &= H_v^{(2,j)-} \quad , \quad H_\theta^{(2,j)-} = H_v^{(2,j)}, \\ & \qquad j = 1, \cdots, m_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

が得られた．式 (2) により，並進変位の座標変換行列 H_v をもとに回転変位の座標変換行列が求められる．

4　解析結果

非適合三角形要素で離散化された均質な正 n 角形板の面外曲げ線形解析にブロック対角化法を適用する．図 3 は D_n −不変な板モデルを解析対象としたときの n の増加に伴う配列容量の変化を各種の方法と比較した結果である．横軸に n とし，縦軸を剛性行列の配列容量およびブロック対角化後の配列容量が全自由度に占める割合をとった．ブロック対角化による配列の占有率（所要配列容量を全自由度の２乗で正規化したもの）は振動しながら０に収束しており，その有利さを示している．

参考文献

[1] Ikeda, K., and Murota, K. : Bifurcation analysis of symmetric structures using block-diagonalization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 86(2), pp.215-243, 1991.

[2] Ikeda, K., Ario, I., and Torii, K. : Block-diagonalization analysis of symmetric plates, *International Journal of Solids and Structures*, 29(22), pp.2779-2793, 1992.

[3] Murota, K., and Ikeda, K. : On randam imperfections for structures of regular-polygonal symmetry *Journal on Applied Mathematics, SIAM*, 52(6), pp.1780-1803, 1992.

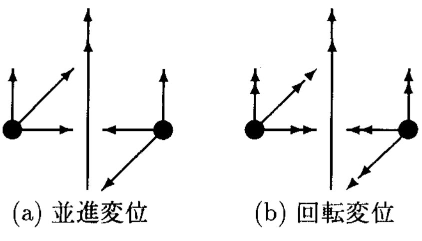

図 1　回転変換 r

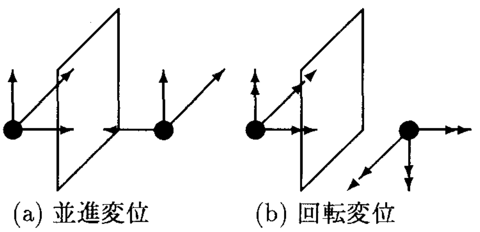

図 2　鏡映変換 s

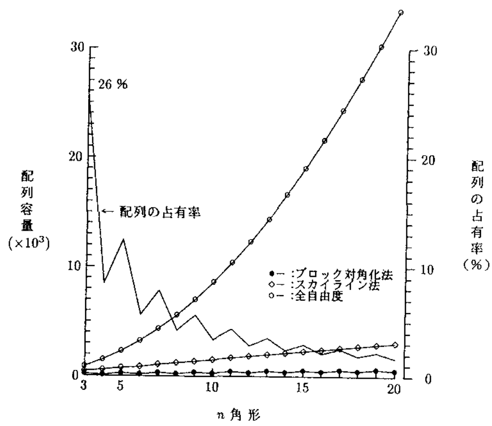

図 3　n 角形と配列容量の関係