

I-622

回転自由度を有する四面体要素の定式化の一検討

武蔵工業大学 学員 中本啓介

武蔵工業大学 正員 増田陳紀

1. はじめに

I型並列合桁橋の垂直補剛材上端部及びガセットプレートの上縁部に亀裂が生じていることが報告されている。著者らは主桁・対傾構取合部の亀裂発生に着目した局部応力を解析的に求める方法の一つとして、局部付近の構造を3次元構造としてモデル化し有限要素解析¹⁾することを提案している。解析結果としてより信頼出来る解を得るために、例えばハンチ部等に既存のアイソパラメトリック系の立体要素、主桁には薄板要素を用いる等として複数の構造要素を一体化し解析モデルを構成しようとする構造物の自由度が異なる問題を生じる。

本研究は、局部応力解析のための解析モデルを合理的に構成するために、面内回転自由度を有す1節点6自由度の18自由度3角形薄板要素²⁾と節点の自由度が適合する1節点6自由度($u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$)の四面体要素の定式化について検討する。検討する要素の定式化は応力仮定のHybrid法に基づいて行う。

2. 有限要素法による定式化

四面体要素の各頂点に設定した節点において変位成分として($u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$)を節点変位としてとる。節点変位 $\{u\}$ 、そして節点変位に対応する節点力 $\{f\}$ また要素内のひずみ $\{\epsilon\}$ 、応力 $\{\sigma\}$ は図-1の上側に示される。ここで、 $\{\}$ は列ベクトル、 $\langle \rangle = \{\}$ ^Tは行ベクトルを表わす。

応力仮定のHybrid法に基づく四面体要素の定式化は薄板要素²⁾を3次元に拡張したものであり、ここでは回転自由度を考慮するための要点について説明する。

有限要素法による定式化では四面体要素における周面変位を節点の変位成分を使って一義的に決める必要がある。個々の節点の変位成分6成分の内から必要な成分を抜き出し要素周面上の変位分布を仮定する。

図-1の下側には四面体を構成する4つの周面三角形の局所座標系を示す。局所座標系は四面体要素の頂点 i と対向している面の局所座標系を $x^{*i}y^{*i}z^{*i}$ とし、節点 i^{*i} を原点にとり節点 $j^{*i} \rightarrow k^{*i}$ と平行に x^{*i} 軸をとる。要素面内で x^{*i} 軸と y^{*i} 軸と右手座標系をなすように z^{*i} 軸を定める。以下、局所座標系の諸量を上付きの $*i$ で表わす。

局所座標系における節点変位は

$$\left. \begin{aligned} \langle u^* \rangle &= \langle \langle u^{*1} \rangle \langle u^{*2} \rangle \langle u^{*3} \rangle \langle u^{*4} \rangle \rangle \\ \langle u^{*i} \rangle &= \langle \langle u^{*i} \rangle_1 \langle u^{*i} \rangle_2 \langle u^{*i} \rangle_3 \rangle \\ \langle u^{*i} \rangle_i &= \langle u^{*i} v^{*i} w^{*i} \theta x^{*i} \theta y^{*i} \rangle_{\text{node}^{*i} i} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

であり、周面上変位は

$$\left. \begin{aligned} \langle u_B \rangle &= \langle \langle u_B^{*1} \rangle \langle u_B^{*2} \rangle \langle u_B^{*3} \rangle \langle u_B^{*4} \rangle \rangle \\ \langle u_B^{*i} \rangle &= \langle u^{*i} v^{*i} w^{*i} \rangle_{\text{side } i} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる。

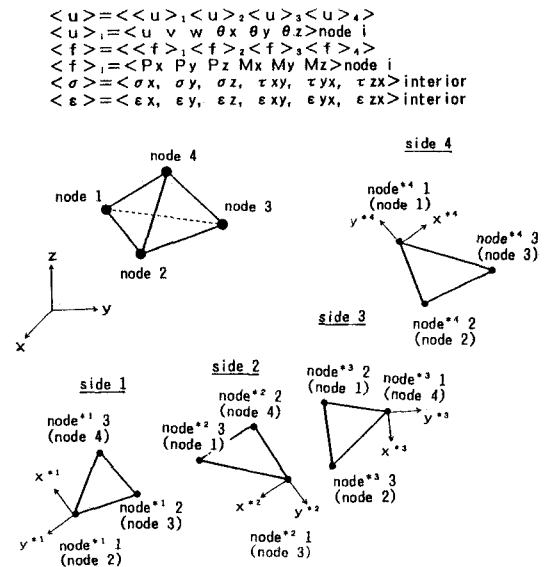


図-1 4個の周面三角形で構成する四面体要素における直交座標系と局所座標系

四面体のそれぞれの面について要素周辺上の変位を1義的に決めるため面内の変位 u_B^{*i} , v_B^{*i} は1次式で、面外の変位 w_B^{*i} は3次式を用いる。

u_B^{*i} , v_B^{*i} は、

$$\begin{Bmatrix} u_B^{*i} \\ v_B^{*i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{*i} \\ v_1^{*i} \\ u_2^{*i} \\ v_2^{*i} \\ u_3^{*i} \\ v_3^{*i} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

と補間する。ただし、 ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 は面積座標である。

面外の変位 w_B^{*i} については、3次の多項式は10個の独立な関数形よりなるが、その内1個(関数形 $\xi_1 \xi_2 \xi_3$)を除いた $\{\phi_c\}^T$ を用いる。

$$w^{*i} = \{\phi_c\}^T \{\alpha\} \quad (4)$$

$$\{\phi_c\}^T = \langle 1, \xi_1, \xi_2, \xi_1 \xi_2, \xi_2 \xi_3, \xi_3 \xi_1, \xi_1 \xi_2^2 - \xi_2 \xi_1^2, \xi_2 \xi_3^2 - \xi_3 \xi_2^2, \xi_3 \xi_1^2 - \xi_1 \xi_3^2 \rangle \quad (5)$$

(4)式と局所座標系による節点変位成分量の関係から次の関係式を得る。

$$w^{*i} = \{\phi\}^T \langle w_1^{*i} \theta_{x_1^{*i}} \theta_{y_1^{*i}} w_2^{*i} \theta_{x_2^{*i}} \theta_{y_2^{*i}} w_3^{*i} \theta_{x_4^{*i}} \theta_{y_5^{*i}} \rangle^T \quad (6)$$

(3), (6)式に回転の座標変換および直交座標系での節点と各面における局所座標系の節点との対応を考慮すれば要素周面上の変位は節点変位 $\{u\}$ を用いて表わされる。

$$\{u_B^{*i}\} = \{L_i\} \{u\} \quad (7) \quad \{L_i\}: 3 \times 24 \text{ のマトリックス}$$

一つの面ではその面に対する垂直な軸回りの回転自由度を考えず5成分で面内、面外の変位を補間する。

各面での要素座標系における自由度は1節点5自由度(面内2自由度、面外3自由度)であるが全体座標系では1節点6自由度(計24自由度)となる。

以上の変位の補間の考え方で四面体の変位を構成した場合、面内と面外の変位の補間の仕方が異なるため三角形どうしが接する稜線上の変位形は(勾配は同じであるが変位量が)異なることとなる。

一方、周面変位に対応する境界力は、

$$\left. \begin{aligned} \langle f_B \rangle &= \langle \langle f_B^{*1} \rangle \langle f_B^{*2} \rangle \langle f_B^{*3} \rangle \langle f_B^{*4} \rangle \rangle \\ \langle f_B^{*i} \rangle &= \langle \tau_{zx}^{*i} \tau_{zy}^{*i} \sigma_z^{*i} \rangle_{\text{side } i} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

であり直交座標系と局所座標系の応力成分の変換関係、および応力の線形分布仮定とから節点における応力ベクトル $\{\sigma_n\}$ を用いて境界力は次のように表わされる。

$$\{f_B^{*i}\} = \{M_i\} \{\sigma_n\} \quad (9) \quad \{M_i\}: 3 \times 24 \text{ のマトリックス}$$

以上、回転自由度を考慮するために要素周辺の変位の補間および対応する境界力の設定について示したが剛性行列の誘導は文献[2]に示されるものと同様な方法により行われる。

3. おわりに

局部応力解析の解析モデルを合理的に構成するために薄板要素と節点の自由度が適合する四面体要素の定式化について検討を行った。要素の定式化は応力仮定のHybrid法に基づき、四面体を4個の周面上3角形から構成されるものと考え面内の変位は1次式で面外の変位は3次式で補間した。そのため、要素の稜線上での変位は適合しない。この点については要素を構成した後、数値解析的に有効性を検討することとする。

【参考文献】

- 1) 増田陳紀・赤井紀文・中本啓介: 主桁・対傾構取合部の局部応力解析のためのモデル化に関する研究, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, pp.255-260, 1992-7.
- 2) 吉田 裕・雨宮栄一郎・増田陳紀: 立体構造解析のための薄板有限要素, 土木学会論文報告集, 第211号, pp.19-29, 1973-3.