Ⅰ-621　代用電荷法の平板解析への適用性に関する研究

札幌市　正員　西川　実
北海道大学工学部　正員　佐藤　浩一

1.まえがき

現在、構造解析の分野において有限要素法および境界要素法が広く用いられている。これらの解析手法にはそれぞれ長所、短所があるが有限要素法の短所は離散化の際、領域分割することによって未知数が増大し、入力データ数が増え演算時間も長くなる点であるといえよう。これに対し離散化に境界分割を用いるが、境界条件式を得るために数値積分を必要としない代用電荷法(Charge Simulation Method)が電気工学の分野において発展してきた。そこで本論文の目的は、従来の手法に代わり代用電荷法の平板解析への適用性を検討し、円形板及び長方形板の数値解析を行いこの解析手法の有効性を検討するものである。

2.代用電荷法の原理

図-1のような領域において、次のラプラス方程式に対し代用電荷法を適用した場合を考える。

$$(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)\psi(x,y) = 0 \quad \cdots(1)$$

$$\psi(x,y) = f(s) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

グリーン関数の重ね合わせ法では、近似解$\phi(x,y)$を次のような一次結合式で表す。

$$\phi(x,y) = \Sigma Q_i G(x, y ;\alpha_i,\beta_i) \quad \cdots(3)$$

ここで、Q_iは未定係数であり、$G(x, y ;\alpha_i,\beta_i)$は$(\alpha_i,\beta_i)$を荷重点とするグリーン関数で与えられる。近似解$\phi(x,y)$は、n個の荷重点$(\alpha_i,\beta_i)$を領域の外に置けば常に式(1)を満たす。したがって、n個の拘束点(a_j,b_j)を境界上にとり式(2)を満たすように未定係数Q_iを決めれば近似解が得られる。(a_j,b_j)で境界条件式を課すと、

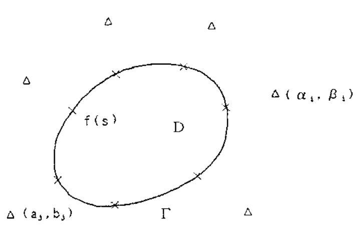

図-1

$$\phi(a_j,b_j) = \Sigma Q_i G(a_j, b_j ;\alpha_i,\beta_i) = f(s_j) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

式(4)はQ_iに関するn元連立方程式であり、ガウスの消去法等の直接法で解を求めることができる。求めたQ_iを式(3)に代入することにより近似解$\phi(x,y)$が得られる。

3.代用電荷法の平板解析への適用

平板解析を行う場合、次の二次元重調和方程式に代用電荷法を適用する。

$$\nabla^4 w(x,y) = q(x,y)/D \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

たわみ$w(x,y)$に対する近似解$\phi(x,y)$はQ_i、M_i を未定係数として次のように表される。

$$\phi(x,y) = S_2(x,y)+\Sigma Q_i G_2(x, y ;\alpha_i,\beta_i)+\Sigma M_i G_1(x, y ;\gamma_i,\delta_i) \quad \cdots(6)$$

ここで、G_2は二次元重調和方程式のグリーン関数であり、G_1はラプラス方程式に対するグリーン関数である。ラプラス方程式に対するグリーン関数も重ね合わせるのは式(5)が4階の微分方程式であり、境界条件が二つになり未知数の数も二倍になることと、調和方程式も重調和方程式の一種であることによる。また、$S_2(x,y)$は荷重 q によるたわみに相当しそれぞれの荷重に関するグリーン関数で与えられる。式(6)に対しn個の拘束点において二つの境界条件式を課すことによりQ_i、M_iに関する2n元連立方程式が得られる。この方程式を解くことにより求まるQ_i、M_iを式(6)に代入することにより近似解$\phi(x,y)$が得られる。直線境界単純支持板に関してはこの方法(直接法)の他に、関数 $\psi(x,y)=(\partial^2 w/\partial x^2)+(\partial^2 w/\partial y^2)$を用いることにより式(5)を2つのポアソン方程式に分け2度連立方程式を解くことによりたわみを求める方法(二段階法)がある。この方法では方程式を解く回数は2度になるが方程式の元の数は半分になる。

4.解析例

代用荷重点および拘束点の配置の例を図-2に示す。

4-1.円形板の解析

周辺単純支持板における中心からの距離rの位置でのたわみの計算結果を公式集による値と比較しグラフに表したものを図-3に示す。いずれの荷重条件に対しても公式集による値とよく一致しているといえる。

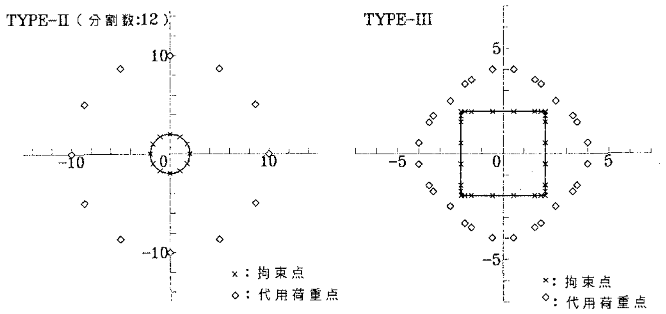

図-2 代用荷重配置例

4-2.長方形板の解析

表-1,表-2および図-4はそれぞれ、四辺固定板における曲げモーメント、四辺単純支持板における最大モーメントおよびx軸上に置けるたわみの計算値を公式集による値と比較したものである。有限要素法では図-5のように要素分割し計算を行った。

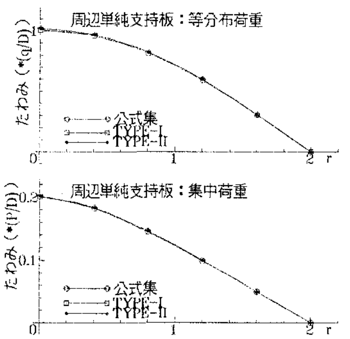

図-3 円形板のたわみ

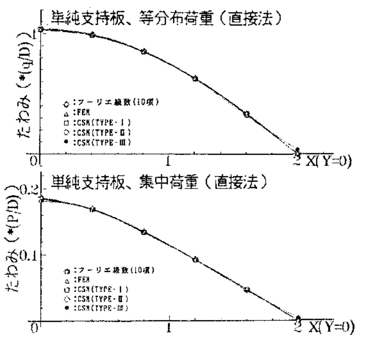

図-4 正方形板のたわみ

表-1

四辺固定板曲げモーメント （一辺a=4）		等分布荷重 M_x(*q) (x=0,y=0)	等分布荷重 M_x(*q) (x=a/2,y=0)	集中荷重 M_x(*P) (x=a/2,y=0)
公式集		$0.0231a^2$ =0.37068	$-0.0513a^2$ =-0.8208	-0.1257
計算値	TYPE-I	0.36669	-0.81298	-0.12662
	TYPE-II	0.36667	-0.82441	-0.12659
	TYPE-III	0.36631	-0.79822	-0.12099

5.あとがき

代用電荷法の平板解析への適用性について検討を行い、数値解析によりいずれの境界条件、荷重条件に対しても公式集による値とよく一致した解が得られることが確認された。円形板のようになめらかな境界を有するものでは、その分割数をかなり少なくしても精度のよい解が得られることが解る。正方形単純支持板の場合に比較に用いた有限要素法では、分割数を増やせば精度のよい解が得られると思われるが、この程度の分割数でも代用電荷法の場合より計算時間は長くかかり、この点においても代用電荷法が有効な手法であると思われる。

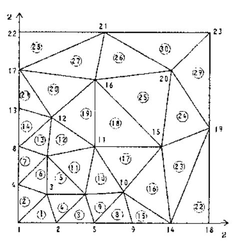

図-5

表-2

四辺単純支持板最大たわみ （一辺a=4）		等分布荷重 w_{max}(*q/D) 直接法	等分布荷重 w_{max}(*q/D) 二段階法	集中荷重 w_{max}(*P/D) 直接法	集中荷重 w_{max}(*P/D) 二段階法
公式集		$0.00406a^4$ =1.03936		$0.0116a^2$ =0.1856	
FEM		1.030		0.1814	
計算値	TYPE-I	1.0327	1.0402	0.18474	0.18561
	TYPE-II	1.0469	1.0386	0.18641	0.18558
	TYPE-III	1.0321	1.0405	0.18513	0.18562

〈参考文献〉

1)村島 定行 ： 代用電荷法とその応用;森北出版,1983 ， 2)村瀬 治比古、小山 修平、石田良平 ： 順·逆解析入門;森北出版,1990 ， 3)土木学会編 ： 構造力学公式集,1986 ， 4)小堀 為雄、吉田 博 ： 有限要素法による構造解析プログラム;丸善,1980