Ⅰ-620　　境界帯板法による直交異方性板の面内応力解析

岩手大学工学部　正員　出戸 秀明　岩崎 正二　宮本 裕
岩手大学工学部　　　　玉内 秀佳

1．はじめに

著者らはこれまでに、有限帯板法の考え方に境界積分方程式の手法を組み合わせた境界帯板法（Boundary Strip Method）[1),2)] により矩形平板の曲げ応力解析 [3)] を行なってきたが、本論文は同様にして直交異方性板の面内応力問題を解析しようとするものである。境界帯板法と呼ばれている方法は、たわみの変位関数として一方向の境界条件を満足する級数解を用いて平板の支配微分方程式を一次元問題に還元し、残りの方向に対して境界積分方程式法に基づく定式化を行なうものである。

2．解析理論

直交異方性平板の面内応力問題の支配微分方程式は、式(1)のように表わすことができる。ただし、u，vは平板のx，y方向変位、X，Yは単位面積当りのx，y方向力とする。

$$\left.\begin{aligned} N_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (N_1 + N_{xy}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + N_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= X \\ N_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (N_1 + N_{xy}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + N_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= Y \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ここで、N_x，N_y，N_{xy}，N_1は直交異方性パラメータである。

図-1のように境界辺上でS，Tの法線力と接線力が作用する長さがℓ_x，ℓの矩形平板を考える。また、対辺単純支持を仮定するとx，y方向変位とx，y方向力は以下のように展開することができる。 ここで、X_n，Y_nは力の状態によって変わる係数である。

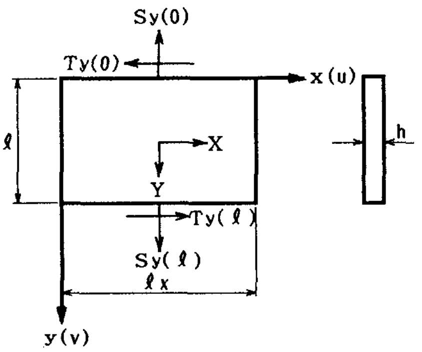

図-1　直交異方性矩形平板

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)\cos(\alpha_n x), \quad & X &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(y)\cos(\alpha_n x) \\ v(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)\sin(\alpha_n x), \quad & Y &= \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\sin(\alpha_n x) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ただし、$\alpha_n = n\pi/\ell_x$， $n = 1, 2, 3, \cdots$。

式(2)を式(1)に代入すると支配微分方程式は次のような一次元の問題となる。

$$N_{xy} \frac{d^2 u_n(y)}{d y^2} + (N_1 + N_{xy}) \alpha_n \frac{d v_n(y)}{d y} - N_x \alpha_n^2 u_n(y) = X_n \quad (3)$$

$$N_y \frac{d^2 v_n(y)}{d y^2} - (N_1 + N_{xy}) \alpha_n \frac{d u_n(y)}{d y} - N_{xy} \alpha_n^2 v_n(y) = Y_n \quad (4)$$

式(3)，(4)にそれぞれ基本解u_n^*，v_n^*を乗じて、y方向の全長ℓにわたって積分を行なった後、両式を足し合わすと

$$\begin{aligned} &\left[T_n(y) u_n^*(y,\xi) - u_n(y) T_n^*(y,\xi) + S_n(y) v_n^*(y,\xi) - v_n(y) S_n^*(y,\xi)\right]_{y=0}^{y=\ell} \\ &+ h\int_0^{\ell} \left\{N_{xy} \frac{\partial^2 u_n^*}{\partial y^2} + (N_1 + N_{xy}) \alpha_n \frac{\partial v_n^*}{\partial y} - N_x \alpha_n^2 u_n^*\right\} u_n(y)\, dy \\ &+ h\int_0^{\ell} \left\{N_y \frac{\partial^2 v_n^*}{\partial y^2} - (N_1 + N_{xy}) \alpha_n \frac{\partial u_n^*}{\partial y} - N_{xy} \alpha_n^2 v_n^*\right\} v_n(y)\, dy \\ &+ h\int_0^{\ell} X_n(y) u_n^*(y,\xi)\, dy + h\int_0^{\ell} Y_n(y) v_n^*(y,\xi)\, dy = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $T_n^*(y,\xi) = h N_{xy} \left(\frac{\partial u_n^*}{\partial y} + \alpha_n v_n^*\right)$， $S_n^*(y,\xi) = h \left(N_y \frac{\partial u_n^*}{\partial y} - N_1 \alpha_n v_n^*\right)$。

このとき、基本解は以下の式の解である。

$$\left.\begin{aligned} N_{xy}\frac{\partial^2 u_n^*}{\partial y^2}+(N_1+N_{xy})\alpha_n\frac{\partial v_n^*}{\partial y}-N_x\alpha_n^2 u_n^* &= \overline{X_n}\cdot\delta(y,\xi) \\ N_y\frac{\partial^2 v_n^*}{\partial y^2}-(N_1+N_{xy})\alpha_n\frac{\partial u_n^*}{\partial y}-N_{xy}\alpha_n^2 v_n^* &= \overline{Y_n}\cdot\delta(y,\xi) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

ただし、$\delta(y,\xi)$はデルタ関数を表わす。 ここで、$\overline{X_n}=1$、$\overline{Y_n}=0$の場合の基本解を$u_n^{*(1)}$, $v_n^{*(1)}$、$\overline{X_n}=0$、$\overline{Y_n}=1$の場合の基本解を$u_n^{*(2)}$, $v_n^{*(2)}$で表わすと式(5)は次式のようになる。

$$\begin{aligned} h\,u_n(\xi) =& \Big[-T_n(y)u_n^{*(1)}(y,\xi)+u_n(y)T_n^{*(1)}(y,\xi) \\ & -S_n(y)v_n^{*(1)}(y,\xi)+v_n(y)S_n^{*(1)}(y,\xi)\Big]_{y=0}^{y=\ell} \\ & -h\int_0^{\ell} X_n(y)u_n^{*(1)}(y,\xi)\,dy-h\int_0^{\ell} Y_n(y)v_n^{*(1)}(y,\xi)\,dy \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} h\,v_n(\xi) =& \Big[-T_n(y)u_n^{*(2)}(y,\xi)+u_n(y)T_n^{*(2)}(y,\xi) \\ & -S_n(y)v_n^{*(2)}(y,\xi)+v_n(y)S_n^{*(2)}(y,\xi)\Big]_{y=0}^{y=\ell} \\ & -h\int_0^{\ell} X_n(y)u_n^{*(2)}(y,\xi)\,dy-h\int_0^{\ell} Y_n(y)v_n^{*(2)}(y,\xi)\,dy \end{aligned} \quad (8)$$

式(7),(8)において$\xi\to0+\varepsilon$、$\xi\to\ell-\varepsilon$としたときのε（微少な正定数）→0の極限を考えることにより、４本の方程式が得られる。これらの式の８個の境界未知量のうち４個については両端の境界条件より定まり、残り４個の未知量は４行４列のマトリックス方程式を解くことにより求めることができる。

３．数値計算例

先に述べた解析方法に基づいて計算プログラムを作成し、数値解析を行った。 表-１は、上辺等分布荷重qを受ける２辺単純支持直交異方性矩形平板の中央点の垂直たわみ、表-２はx方向応力σ_xの解析結果である。ここで、$\ell_x=100$cm、板厚10cm、弾性係数$E_x=2.1\times10^6$kgf/cm²、ポアソン比$\nu_x=0.3$, $\nu_y=0.4$としており、nは級数の項数である。また、表中には有限帯板法（ＦＳＭ）による解析結果も示してある。

表－１ 上辺等分布荷重qを受ける２辺単純支持直交異方性矩形平板の中央点のたわみ

$v=a(q\,\ell_x/Nx)$ $[x=\ell_x/2,\ y=\ell/2]$

ℓ/ℓ_x	a		
	ＢＳＭ		ＦＳＭ
1.0	0.5401	(n=7)	0.5392
2.0	0.1430	(n=3)	0.1419
4.0	0.01604	(n=1)	0.01505

表－２ 上辺等分布荷重qを受ける２辺単純支持直交異方性矩形平板のx方向応力

$\sigma_x=a\,q$ $[x=\ell_x/2,\ y=\ell/5]$

ℓ/ℓ_x	a		
	ＢＳＭ		ＦＳＭ
1.0	-0.3863	(n=13)	-0.3798
2.0	0.03488	(n= 5)	0.04172
4.0	0.1318	(n= 3)	0.1348

４．あとがき

本論文では、直交異方性板の面内問題のみを取り扱った。同様な方法により面外問題に関しても解析を行っている[3]ので、今後の課題としては面内面外両作用が共存するような立体的な構造物の解析にこの手法を拡張したい。

参考文献

１）堀部忠志：境界積分方程式法による長方形板の曲げ問題の一解法、境界要素法論文集　第５巻、pp.143-148、1988

２）堀部忠志：弾性床上長方形平板の大たわみ問題の境界帯板法による解析、境界要素法論文集　第６巻、pp.217-222、1989

３）出戸秀明、岩崎正二、宮本 裕 ほか：境界積分方程式法による矩形平板の曲げ応力解析、土木学会第47回年次学術講演会講演概要集、I-372、1992