I－618　非線形骨組構造解析における不釣り合い力の補正について

早大理工・院　学生員 ○ 石川　智巳
早大理工土木　　正員　　依田　照彦

1．はじめに

構造物の設計では、常に構造物全体の終局の限界状態について注意が払われている。このため構造物の変形挙動、とりわけ耐荷力の把握には多方面からの検討が必要となる。構造物の非線形つり合い径路を正確にかつ効率よく追跡する努力もその一つと考えてよい。非線形解析の解析時間の効率化のみに注目しても、現行の最も一般的な非線形解析アルゴリズムを用いた場合、アルゴリズムによっては、多大な計算時間を要することも少なくない。特に反復過程においては、大次元の逆マトリックス演算を数回繰り返すことが一般的であるため、反復過程の多寡が計算時間に大きな影響を及ぼしている[1]。そこで、本報告では、骨組構造の幾何学的非線形問題を対象に、汎用性に富む弧長増分法を増分過程に用い、反復過程での収束計算に不平衡変位最小法を取り入れたアルゴリズムを提案する。ここで提案した方法が従来の方法と比較して、定式化が簡単であること、収束状況がかなりよいことなどを、エラスティカの数値解析例とともに示す。

2．不平衡変位最小法

不平衡変位とは、不つり合い力に対して、その時点の全変位を考慮して求められる接線剛性マトリックスを介して、次式により得られる変位量を意味する。

$$\{\Delta\delta_R^{(n-1)}\}=[K_t^{(n)}]^{-1}\{R^{(n-1)}\}\quad（ただし、n\geqq 2）\qquad(1)$$

ここに$\{\Delta\delta_R^{(n-1)}\}$，$\{R^{(n-1)}\}$は、それぞれ反復回数$(n-1)$回目の不平衡変位、不つり合い力を表し、$[K_t^{(n)}]$は、$(n-1)$回目までの全変位から誘導される接線剛性マトリックスである。

反復回数n回目の変位増分ベクトル$\{\Delta\delta^{(n)}\}$は、

$$\{\Delta\delta^{(n)}\}=\{\Delta\delta_R^{(n-1)}\}+\Delta\lambda^{(n)}\{\delta_0^{(n)}\}\qquad(2)$$

とおくことができる（図１参照）。ただし、$\{\delta_0^{(n)}\}$は、基準荷重ベクトル$\{P_0\}$を用いて、

$$\{\delta_0^{(n)}\}=[K_t^{(n)}]^{-1}\{P_0\}\qquad(3)$$

として誘導される基準変位ベクトルである。

不平衡変位を最小にするためには、変位増分ベクトルの２乗和を最小とするような$\Delta\lambda^{(n)}$を求める必要がある[2]。そのために、次式を導入する。

$$\frac{\partial}{\partial\Delta\lambda^{(n)}}[\{\Delta\delta^{(n)}\}^T\{\Delta\delta^{(n)}\}]=0\qquad(4)$$

式（４）より荷重増分パラメータ$\Delta\lambda^{(n)}$は、

$$\Delta\lambda^{(n)}=-\frac{\{\delta_0^{(n)}\}^T\{\Delta\delta_R^{(n-1)}\}}{\{\delta_0^{(n)}\}^T\{\delta_0^{(n)}\}}\qquad(5)$$

と表される。式（５）が反復過程における基礎式である。

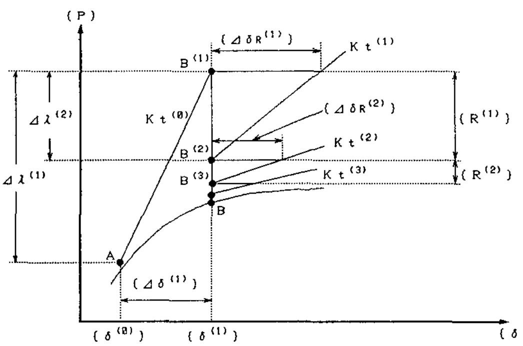

図1　不平衡変位最小法における反復過程の模式図

3．　数値解析例

不平衡変位最小法の有効性を確かめるために、解析対象としてエラスティカ（初期不整 L/200）を取り上げる。数値解析手法としては増分過程に、弧長増分法を適用し、反復過程については接線剛性に直角に収束解を追っていく最も一般的な方法（一般的な弧長増分法と呼ぶ）と、本報告で示した不平衡変位最小法との２種類を用いて比較検討をおこなっている。

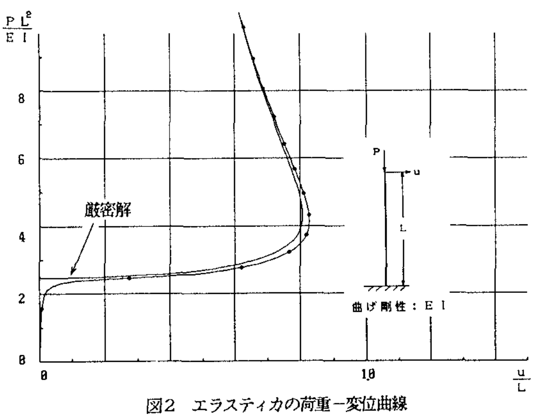

図2　エラスティカの荷重－変位曲線

図２は、エラスティカの問題において弧長増分と

不平衡変位最小法を併用し、収束計算を１回のみ行ったときのつり合い曲線である。この時、荷重レベル１０に達するまでに１３２ステップ要している。また、図示はしていないが、一般的な弧長増分法を用いて計算した結果、９０ステップで同じ荷重レベルに達している。図３、図４は、それぞれ一般的な弧長増分法と不平衡変位最小法の収束の方向を示したものである。一般的な解析法では接線剛性にほぼ直角に、不平衡変位最小法では、ほぼ真下に収束している。このことが、先に示したように全体のステップ数に差が生じた原因と考えられる。

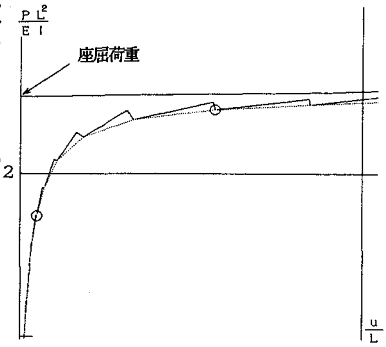

図３　一般的な弧長増分法における収束状況

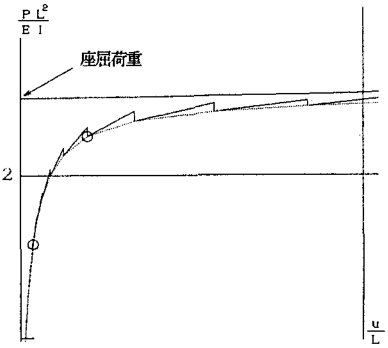

図４　不平衡変位最小法における収束状況

さらに、図５、図６にそれぞれの方法における不平衡変位の減少率を示す。この減少率は、

$$\frac{\{\Delta\delta_R^{(2)}\}^T\{\Delta\delta_R^{(2)}\}}{\{\Delta\delta_R^{(1)}\}^T\{\Delta\delta_R^{(1)}\}}\times 100 \quad (\%) \qquad (6)$$

によって求めている。これより、一般的な弧長増分法では７９ステップ目で最大４９．５％の補正率、不平衡変位最小法では、１０２ステップ目で最大１２．７％の補正率という結果を得ており不平衡変位最小法の方が約４倍収束性がよいことがわかる。

以上の解析結果より、一般的な弧長増分法で不平衡変位最小法と同様の収束性を得るためには、各反復過程において、少なくともさらに１～２回の収束計算が必要であるので、逆マトリックス演算数を計算時間の目安におけば、不平衡変位最小法では、全ステップ数が多いことを考慮しても、かなり計算時間の効率化が図れることになる。また、ステップ数を多くすれば近似精度が上がることも確かめた。

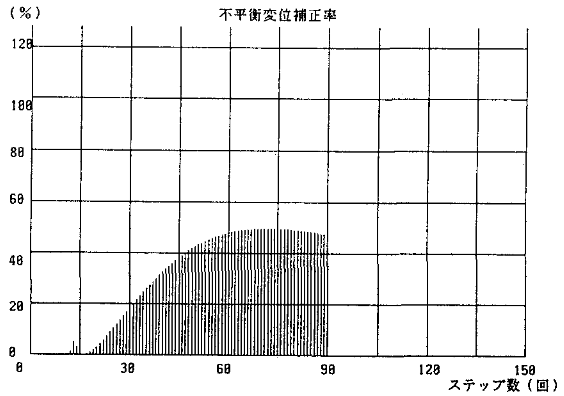

図５　一般的な弧長増分法における不平衡変位補正率

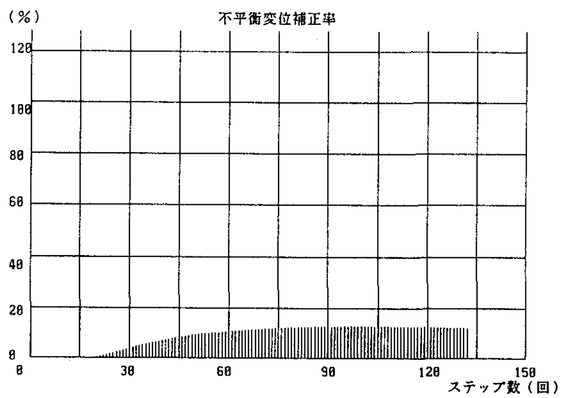

図６　不平衡変位最小法における不平衡変位補正率

４．あとがき

本報告では、不平衡変位最小法の利点として、従来の慣用的な方法に比べて収束性がよく、非線形構造解析の効率化が図れること、また、式（４）、（５）からわかるように定式化が非常に単純であるため、従来のプログラムに簡単に導入することが可能であることを結論として得ている。

今後の課題としては、複合非線形問題に対しても、不平衡変位最小法が有効であるかどうかを検討することが挙げられる。

参考文献

１）　吉田裕：有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題，土木学会論文集，第３７４号／Ｉ－６，１９８６年１０月．

２）　S.L.Chan:'Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method',Int.J.Numer.Methods Eng.,Vol.26,2657-2669(1988).