

## I-617

## ケーブルの緊張と弛緩に関する一考察

法政大学 学生員 中野智文  
法政大学 正会員 阿井正博

法政大学 学生員 ○増田進一

**1.はじめに.** ケーブル構造の実用的な解析として、ケーブルを非抗圧縮性の引張直線部材とみなして変位法として有限変位解析を展開する手順があるが、ケーブルのたわみと緊張は本来連続的に生じるものであり、ここでは弾性カテナリーとしての厳密な形状の上でのエネルギー関係により、それらについて理論的に考察する。

**2.弾性カテナリー.** 初期長さ  $\ell$ 、伸び剛性  $EA$ 、単位長さ重量  $w$  のケーブルの厳密なつり合い形状は、始端張力成分  $T_0 = \{T_{0x}, T_{0y}\}$  をパラメータとして

$$x(T_0, s) = \frac{T_{0x}s}{EA} + \frac{T_{0x}}{w} \ell \log \left\{ \frac{T_{0y} + \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2}}{(T_{0y} - ws) + \sqrt{T_{0x}^2 + (T_{0y} - ws)^2}} \right\}$$

$$y(T_0, s) = \frac{T_{0y}s - ws^2/2}{EA} + \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2} - \sqrt{T_{0x}^2 + (T_{0y} - ws)^2} \right\} \dots\dots\dots(1.a, b)$$

と表される(図-1)。<sup>1), 2)</sup>ここに  $s$  は、伸び前のケーブルの長さに沿う物体固定座標 ( $0 \leq s \leq \ell$ )。ケーブルの終端 ( $s = \ell$ )が特定の位置  $\{x^*, y^*\}$  に固定される時には、 $x(T_0, \ell) = x^*$ 、 $y(T_0, \ell) = y^*$ を満す張力成分  $\{T_{0x}, T_{0y}\}$  を繰り返し計算により求めて形状が得られる。<sup>3)</sup>

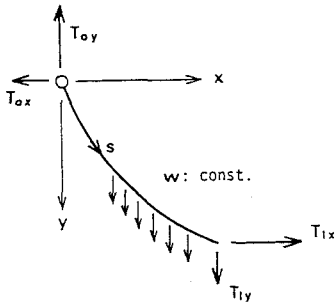


図-1 弾性カテナリー

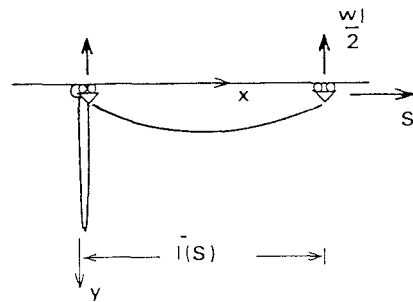


図-2 水平ケーブル

**3.水平ケーブルのエネルギー関係.** 両端を水平に支持して弦張力  $S$  を作用させたときの形状(図-2)は、 $\{T_{0x}, T_{0y}\} = \{S, w\ell/2\}$ であることを式(1.a, b)に代入して直接得られる。図-2の保存系では、 $0 \rightarrow S$  の変化において弦張力がなす仕事  $\Phi_s(S)$  は、ケーブルのひずみエネルギー  $U(S)$  の増加と分布自重  $w$  の持ち上がりによるポテンシャル  $\Phi_w(S)$  の増加に変換される。水平ケーブルの場合では、 $U(S)$  は式(1.a, b)で  $\ell(S) = x(S, \ell)$  を用いて

$$\Phi_s(S) = \int_0^{\ell} S d\bar{\ell} = \int_0^S S \frac{d\bar{\ell}(S)}{dS} dS$$

$$= \frac{S^2 \ell}{2EA} + \frac{w\ell^2}{4} - \frac{\ell}{2} \sqrt{S^2 + \left(\frac{w\ell}{2}\right)^2} + \frac{S^2}{2w} \ell \log \left\{ \frac{\sqrt{S^2 + \left(\frac{w\ell}{2}\right)^2} + \frac{w\ell}{2}}{\sqrt{S^2 + \left(\frac{w\ell}{2}\right)^2} - \frac{w\ell}{2}} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

となり、他の  $U(S)$  と  $\Phi_w(S)$  も解析的に得ることができる(後述)。このとき、前述のエネルギー関係は

$$\Phi_s(S) = (U(S) - U(0)) + (\Phi_w(S) - \Phi_w(0))$$

$$= U(S) + \Phi_w(S) + \text{const.} \dots\dots\dots(3)$$

と表される。 $0 \rightarrow S$  でのケーブルが弛緩している初期段階では、 $S$  がする仕事のほとんどはケーブルの持ち上げ ( $\Phi_w(S)$  の増加) に費われ、その後緊張するにつれてその多くは、ひずみエネルギー  $U(S)$  の増加に変換される。このとき  $S$  は、ポテンシャル  $\Phi_s(S)$  をもつ保存力であり、式(3)を微分することにより

$$S \left( = \frac{d\Phi_s}{d\bar{\ell}} \right) = S_v + S_w, \text{ ここに, } S_v = \frac{dU(S)}{d\bar{\ell}} = \frac{dS}{d\bar{\ell}}, \quad S_w = \frac{d\Phi_w(S)}{d\bar{\ell}} = -\frac{dS}{d\bar{\ell}} \dots\dots(4.a-c)$$

と分解することができる。すなわち、 $S_v$  は伸びによる弦張力の保存力成分（ひずみ張力）、 $S_w$  は自重  $w$  によるたわみに関係した  $S$  中の成分（サグ張力）であり、この両者の比はケーブルの弛緩と緊張を決定する量と考えることができる。

**4. 傾いたケーブルでの展開。**— ケーブルは水平に支持されて用いられるとは限らず、図-3に示す傾角  $\tau$  のローラ面に張られたケーブルを考える。ローラ支持にしたがって終端張力を反力  $N$  と斜面方向  $S$ （外力）に分解するものとすれば、 $S$  を与えたときのつり合い形状は、式(1. a, b)の  $\{x_R, y_R\}$  が斜面直角方向の適合条件が満たすように、 $N$  を繰り返し計算により決定して得られる。このとき、 $S$  がする仕事  $U(S)$  は、式(2)のように陽な形で得られないが、図-3は明らかに保存系であり、式(3)、(4. a-c)と同じ関係を考えることができる。 $\{S, N\}$  に対して終端張力成分は  $\{T_{Rx}, T_{Ry}\} = \{S \cos \tau + N \sin \tau, S \sin \tau - N \cos \tau\}$ 、始端成分は  $\{T_{Ox}, T_{Oy}\} = \{T_{Rx}, T_{Ry} + w\ell\}$  であり、ひずみエネルギー  $U(S)$  と自重ポテンシャル  $\Phi_w(S)$  は

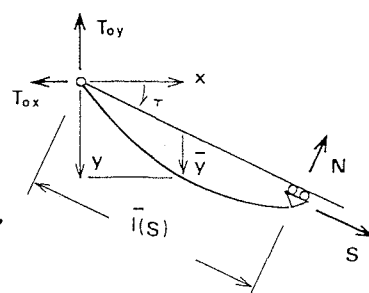


図-3 斜面上のケーブル

$$U(S) = \left( \int_0^{\ell} \frac{T^2}{2EA} ds \right) = \frac{1}{2EA} \left\{ T_{Ox}^2 \ell + \frac{1}{3w} (T_{Oy}^3 - T_{Ly}^3) \right\}$$

$$-\Phi_w(S) = \left( \int_0^{\ell} w y(s) ds \right) = \frac{w}{EA} \left\{ \frac{T_{Oy} \ell^2}{2} - \frac{w \ell^3}{6} \right\} + T_{Ox} \ell$$

$$+ \frac{T_{Ox}^2}{2w} \left\{ \frac{T_{Ly} T_{Lx}}{T_{Lx}^2} - \frac{T_{Ly} T_{Ox}}{T_{Ox}^2} + \frac{1}{2} \ell \log \left( \frac{T_{Lx} + T_{Ly}}{T_{Lx} - T_{Ly}} \cdot \frac{T_{Ox} - T_{Oy}}{T_{Ox} + T_{Oy}} \right) \right\} \dots \dots \dots (5. a, b)$$

のように得られる。ただし、 $T_{Ox} = \sqrt{T_{Ox}^2 + T_{Oy}^2}$ ,  $T_{Rx} = \sqrt{T_{Rx}^2 + T_{Ry}^2}$ 。(水平ケーブルでの  $U(S)$  と  $\Phi_w(S)$  は、 $\tau=0$ ,  $\{T_{Ox}, T_{Oy}\} = \{S, w\ell/2\}$  として得られる。)  $\tau \approx 0$  の傾いたケーブルでは、式(4. b, c)の微分は水平ケーブルの場合のように解析的には展開できないが、差分形式での数値計算により  $S_v$  と  $S_w$  の数値を得ることができる。

**5. 数値計算例。**— 外径54mm、長さ50mの構造用スパイラルロープ ( $w=0.0144$  ton/m,  $EA=2,8016$  ton) を傾角  $30^\circ$  で数値計算した。図-4は  $S$  を自重  $w\ell$  の  $0 \sim 100$  倍で変化させたときのひずみエネルギー  $U$ 、自重ポテンシャル  $\Phi_w$  およびサグポテンシャル  $\Phi'_w$  (傾面を基準線とした自重ポテンシャル:  $\int_0^{\ell} w \bar{y}(s) ds$ ) を  $w\ell^2$  で無次元化して表しており、 $S$  の増加による  $\Phi_w$  と  $\Phi'_w$  の減少、 $U$  の増加がみられる。図-5は、対応する  $S_v$  と  $S_w$  の変化 ( $w\ell$  で無次元化) を横軸  $\bar{\ell}/\ell$  に対して示したものである。 $S_w$  は  $\bar{\ell}/\ell=0.99999$  付近で最大値4.495  $w\ell$  ( $S=S_v+S_w=6.875 w\ell$ ) となり、その後急激に減少するのが見られる。弛緩と緊張の境界の決定にはさらに工学的判断を要するが、この最大値あるいはその後の変曲点等を一応の目安として判断することができる。

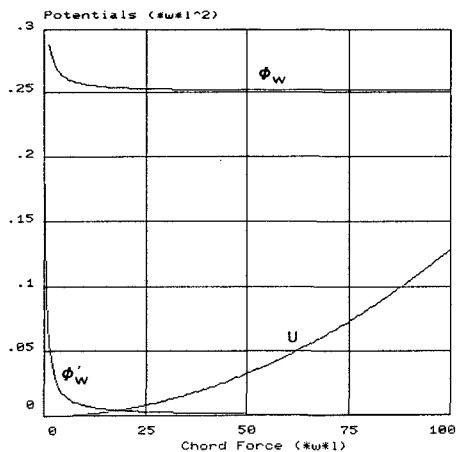


図-4 自重ポテンシャルとひずみエネルギー

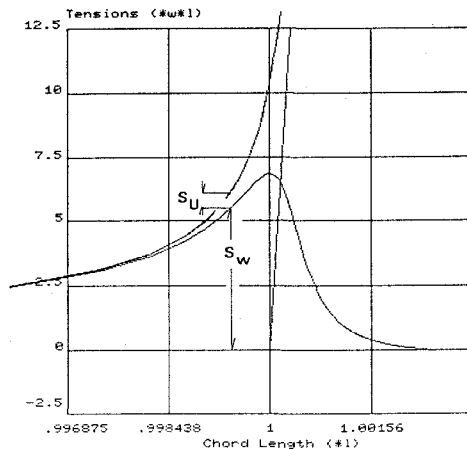


図-5 サグ張力とひずみ張力

#### <参考文献>

- 1) O'Brien, W.T. and Francis, A.J., "Cable Movements under Two-Dimensional Loads," J. of Str. Div., ASCE, Vol. 90, NO. ST 3, Proc. Paper 3929, pp.89~123, Jun., 1964.
- 2) Jennings, A., "Discussion of Cable Movement under Two-Dimensional Loads," by W. T. O'Brien and Arthur J. F., J. of Str. Div., ASCE, Vol. 91, NO. ST 1, Proc. Paper 4216, pp. 307~311, Feb., 1965.
- 3) 阿井・西岡・奥村, "ケーブル構造に関する一理論解析," 土木学会論文報告集, NO. 260, 1977-4.