

I-616

Duffing 型応力-ひずみ関係を有する柱の圧縮安定について

日本大学 学生員 ○平野 敦子

日本大学 正 員 能町 純雄

日本大学 正 員 阿部 忠

日本大学 正 員 木田 哲量

1. 序論 構造物の安定問題は構造形式・施工技術が進歩していく上で重要になってきている。また、今日では、材料が多種多用化しているため、それらの材料に適合する解析方法が必要とされてきている。

よって、本研究は、応力 σ がひずみ ε の奇数べきで表されるDuffing 型応力-ひずみ関係を有する材料からなる柱が圧縮応力下におかれた場合、柱の変形が大変形に移行する不安定特異点までを研究の範囲とし、曲げ座屈変形による柱の縮み、座屈前の縮みを無視し、理論解析を行うこととする。

2. Duffing 型応力-ひずみ関係 非線形な力学特性を有する材料に外力が作用した場合の応力 σ とひずみ ε の関係を可逆性を考慮して、構成材料の初期接線弾性係数を E 、最大応力発生時のひずみを ε_0 として表すと、式(1)が得られる。

$$\sigma = E \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3\varepsilon_0^2} \right) \quad (1)$$

ここで、式(1)がDuffing振動方程式の復元力の関係と同様に奇数べきで表されるので、式(1)をDuffing型応力-ひずみ関係と称することとする。

3. 解析方法 柱の支持条件は両端ヒンジとし、材料の応力-ひずみ関係は式(1)で示すDuffing型とする。また、部材断面では平面保持法が成立するものとし、平面ひずみの状態を式(2)とする。

$$\varepsilon = \varepsilon_c - \kappa y \quad (2)$$

ここで、 ε_c : 図心軸のひずみ値、 κ : 曲率、 y : 図心軸からの距離

次に、曲げモーメント M を $M = \int_A \sigma y dA$ 、軸力 N を $N = \int_A \sigma dA$ なる関係より求め、無次元化して整理すると、無次元化された曲げモーメント M' 、軸力 N' は式(3)、(4)となる。

$$M' = \frac{M}{E I \kappa_0} = m - m n^2 - \frac{m^3}{5} \quad (3) \quad N' = \frac{N}{E A \varepsilon_0} = n - \frac{n m^2}{3} - \frac{n^3}{3} \quad (4)$$

ここで、 A : 断面積、 I : 断面2次モーメント、 m : 曲率比($=\kappa/\kappa_0$)、

n : ひずみ比($=\varepsilon_c/\varepsilon_0$)、 κ_0 : 最大曲率、

また、断面力のつり合いは、たわみ W の付加曲げの状態を考慮し、変形を図-2(a)、断面力のつり合い関係を図-2(b)とすると、変形後の断面力のつり合い関係式(5)が得られる。

$$M_x - N W_x = 0 \quad (5)$$

次に、たわみ曲線を正弦級数第1項と仮定した状態Ⅰと、第3項までと仮定した状態Ⅱの2つの状態について座屈条件を算出することとする。

1) たわみ曲線の仮定を正弦級数第1項までと仮定した場合(状態Ⅰ)

$W_x = a_1 \sin(\pi x/L)$ と表し、式(5)を無次元化する。さらに重み関数としてたわみ曲線の仮定から $\sin(\pi x/L)$ を用いて、無次元化された軸力 N' を定数とし、柱の長さ $0 \sim L$ まで積分する。次に、無次元化された軸力 N' の式(4)をひずみ

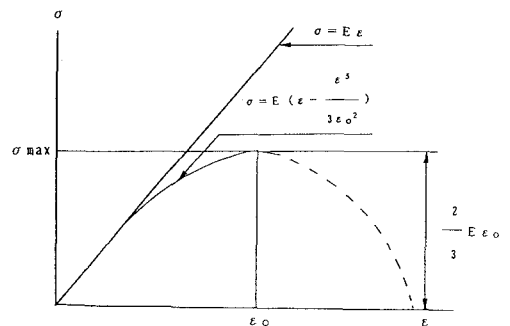


図-1 応力-ひずみ関係

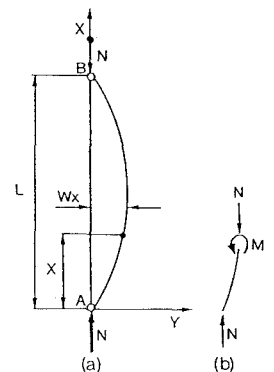


図-2 つり合い関係

比 n の関係から重み関数として $\sin(\pi x)$ を用い、柱の長さ $0 \sim L$ まで積分計算する。したがって、つり合い関係式を積分計算して求めた関係式と無次元化された軸力 N' を積分計算した関係より、曲率比 m はひずみ比 n の関数として表され、座屈条件式として式(6) が得られる。

$$m_1^2 = \frac{1 - n^2 - \frac{\lambda^2}{\pi^2} \varepsilon_0 \left(n - \frac{n^3}{3}\right)}{\frac{3}{20} - \frac{\lambda^2 \varepsilon_0 n}{6\pi^2}} \quad (6)$$

ここで、 λ : 細長比、 m_1 : たわみ曲線の第1項目による曲率比の最大座標(ただし、柱中央部において $m = m_1$)

2) たわみ曲線の仮定を正弦級数の第3項目までと仮定した場合(状態II) $W_x = a_1 \sin(\pi x/L) + a_3 \sin(3\pi x/L)$ として表すこととする。1項目と同様の解析方法で、重み関数として $\sin(\pi x/L)$ 、 $\sin(3\pi x/L)$ を用いて解析を行う。よって、求められた座屈条件式は、つり合い関係に重み関数として $\sin(\pi x/L)$ を用いた場合が式(7)、つり合い関係に重み関数として $\sin(3\pi x/L)$ を用いた場合が式(8) として得られる。

$$\left(\frac{-9\pi^2 + 10\lambda^2 \varepsilon_0 n}{3\pi^2}\right) m_1^2 + 3m_3 m_1 + 20 \left\{ \left(1 - n^2\right) - \frac{\lambda^2 \varepsilon_0 n}{\pi^2} \left(1 - \frac{n^2}{3}\right) \right\} + \left(\frac{-18\pi^2 + 10\lambda^2 \varepsilon_0 n}{3\pi^2}\right) m_3^2 = 0 \quad (7)$$

$$m_1^3 + \left(-6 + \frac{10\lambda^2 \varepsilon_0 n}{27\pi^2}\right) m_3 m_1^2 - 20m_3 \left\{ \frac{\lambda^2 \varepsilon_0 n}{9\pi^2} \left(1 - \frac{n^2}{3} - \frac{1}{6} n m_3^2\right) - (1 - n^2) + \frac{3}{20} m_3^2 \right\} = 0 \quad (8)$$

ここで、 m_3 : たわみ曲線の第3項目による曲率比の最大座標(ただし、柱中央部において曲率比 $m = m_1 = m_3$)

なお、状態I、IIともに平面ひずみの関係式より、 $m = 0$ が曲げ変形が発生しない状態、 $m + n = 1$ のときが最大応力発生時である。

本研究では、状態Iの場合は、式(6) を満足する m 、 n を求めて軸力を算出する。また、状態IIの場合は式(7)、(8)を同時に満足する m 、 n を求めて軸力を算出することとする。ここで、細長比は1~50 まで連続的に変化させ細長比と軸力の関係を $\varepsilon_0 = 0.06$ を用いて解析を行うこととする。

4. 結果および考察 図-3 に示す $\varepsilon_0 = 0.06$ のときの細長比と軸力の関係より、状態I、IIの最大応力発生時について比較検討する。この場合、高次の重み関数による影響は細長比が大きくなると表れているが、約1%の差である。また、これを重み関数による誤差として考えるならば全体としてはほぼ同様な結果を示しており、正弦級数第3項目による変形は考慮しなくても十分な解析結果が得られると考えられる。また、正弦級数の第3項目による曲率比 m_3 は微少な項であり、実際の柱のたわみは正弦級数の第1項により生じていることが分かる。よって、状態I、IIはほとんど同じように、短柱域においては、曲げ変形が発生しない状態と最大応力発生時ではほぼ一致する結果が得られた。したがって、この範囲では材料固有の降伏荷重において不安定となることが分かる。そして、細長比が大きくなるにつれて降伏荷重以前で座屈することを示し、また、最大応力発生時と曲げ変形が発生しない状態では最大応力発生時における軸力が低下する結果となっている。これは、曲げ変形により軸力の減少が起こることを明らかにしている。

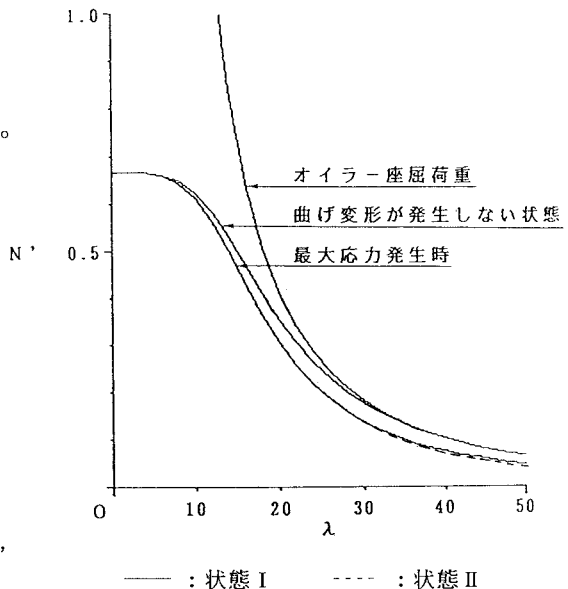


図-3 $\varepsilon_0 = 0.06$ の時の細長比と軸力の関係