

北海道大学工学部 正 員 平沢 秀之

北海道大学工学部 正 員 佐藤 浩一

1. はじめに

塑性ヒンジ法は、材料の非線形性を考慮した骨組構造物の解析法として代表的なもので、剛性マトリックス法と組み合わせることにより、終局崩壊荷重を電子計算機により数値的に求めることができ、さらに崩壊に至るまでの荷重、変位、断面力の過程を追跡することができるため、非常に有効で実用的な方法である。しかし、塑性ヒンジ法は、(1)部材のある断面が降伏に達するまでは、弾性の範囲である。(2)部材のある断面が、一旦降伏に達したならば、その断面は完全に塑性状態である。(3)部材端に塑性ヒンジを生じた場合、ヒンジとヒンジの間の部材は弾性である。という仮定に基づいているため、降伏に達した断面が、突然完全な弾性体から、塑性体に変化するので、その荷重-変位曲線はなめらかではない。また、非線形な状態における、構造物の剛性や強度を過大に評価してしまう欠点がある。そこで本報告では、これらの欠点を改良するために、剛性マトリックスを修正することにより、部材断面の初期降伏から全塑性へ移行する過程を考慮し、解析を行った。

2. 解析手法

いま、円形断面を持つはり部材に曲げモーメント M を増加させていくとき、はりの断面内に生ずる応力分布を、弾性状態から全塑性状態に至る過程を示すと、図-1のようになる。図-1(d)のような全断面塑性となるとき、曲げモーメントを M_0 、同様に、ねじりを受けた場合に全断面塑性となるとき、ねじりモーメントを T_0 とし、 $m=M/M_0$ 、 $t=T/T_0$ とおく。曲げとねじりを同時に受けた場合の降伏条件式を、ここでは、

$$m^2 + t^2 = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

を用いることとする³⁾。また、図-1(b)のように、外縁が σ_y 、 τ_y に達したとき(弾性限界)の曲げモーメント、ねじりモーメントをそれぞれ M_y 、 T_y とすると、曲げとねじりを同時に受けた場合の弾性限界となるための条件式は、式(1)と同様な形であると仮定し、

$$m'^2 + t'^2 = 1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

とする。ただし、 $m'=M/M_y$ 、 $t'=T/T_y$ である。漸増曲げモーメント、及びねじりモーメントを受ける断面は、やがて式(2)を満たし、弾性限界に達した後、弾塑性状態を経て最後には式(1)を満たし全塑性に至る。この過程を図示すれば、図-2のようになる。式(1)の左辺を F^2 とおくと、

$$F = \sqrt{m^2 + t^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となり、 F は、図-2において原点から任意点 (m, t) までの距離を表す。

今、図-2において、 $A(m_A, t_A)$ 、 $B(m_B, t_B)$ 、 $C(m_C, t_C)$ とおき、塑性化の程度を表す係数 α を次式により導入する。

$$\alpha = (F_B - F_A) / (F_C - F_A) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $F_A = \sqrt{m_A^2 + t_A^2}$ 、 $F_B = \sqrt{m_B^2 + t_B^2}$ 、 $F_C = \sqrt{m_C^2 + t_C^2} = 1.0$ である。この α は、 $F_B = F_A$ のとき $\alpha = 0$ 、 $F_B = F_C$ のとき $\alpha = 1$ となり、 $F_A < F_B < F_C$ のとき、 m と t の変化に伴い直線的に変化するパラメータで、図-3のように表される。今、骨組部材の両端が弾性の場合の剛性マトリックスを K_0 、一端に塑性ヒンジを生じた場合を K_p とすると、塑

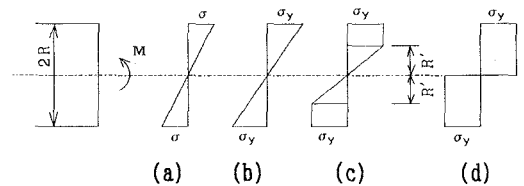


図-1 応力の降伏過程

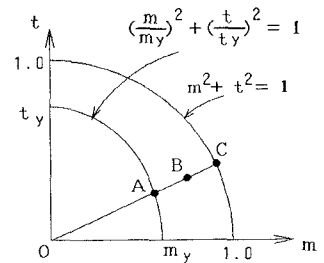
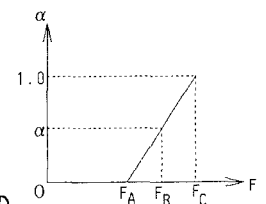


図-2 相関曲線

図-3 係数 α

性ヒンジ法によれば断面力の増加に伴って K_0 から K_p へと瞬間的に変化するが、ここでは滑らかに変化するよう α に関する簡単な二次式を用いて K_0 を修正する⁴⁾。剛性マトリックスの (m,n) 要素について式で表すと、

$$K_{0,p}(m,n) = K_0(m,n) \times f_{mn}(\alpha_i, \alpha_j) \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここで、 $K_{0,p}(m,n)$ =修正された剛性マトリックスの (m,n) 要素、 $f_{mn}(\alpha_i, \alpha_j)$ =式(4)で与えられる α に関する二次式、添字 i, j は節点を表す。増加する荷重に対して式(3)の F が F_A に達した後、漸増する荷重に対して式(4)により α を求め、式(5)により剛性マトリックスを修正しながら、 F_c に到達するまで計算をすることにより、塑性崩壊荷重と変位を求めることができる。

3. 計算例

3.1 片持ばり 格子桁で解析する前に、図-4のような簡単な片持ばりの先端に P が作用した場合のたわみを解析した。塑性ヒンジ法による場合は、 $P=P_0$ に達した瞬間支点において全塑性状態になり、崩壊する。本法による場合は、 $P=P_0$ に達したとき、すなわちばりの断面の外縁において塑性となるときからたわみが大きくなりはじめ、崩壊荷重に達したときには、たわみは塑性ヒンジ法による場合の約1.5倍となる。点線は、曲げモーメントと曲率の関係からコンプリメンタリーエネルギーを求め、カステリヤノの定理を用いてたわみを計算した結果で、厳密解と考えられる²⁾。本法と厳密解は、非常に良く一致している。

3.2 格子桁（主桁3本、横桁3本） 図-5に示すような簡単な格子桁について計算した。 $P=1.07[t]$ で点Aにおいて最初に降伏が始まり、以後降伏する断面が増えるに従って、たわみの値が塑性ヒンジ法による解よりも大きくなっていく。最終的な崩壊機構は、A、B、Cの点が塑性ヒンジを形成するときであり、崩壊荷重は、 $P=2.91[t]$ である。

4. おわりに

断面が降伏し始めてから、全塑性に至るまでの過程を、断面力 M, T から塑性化の程度を表す係数 α を導入し、これを用いて剛性マトリックスを修正することにより、弾塑性状態を考慮することができた。本報告の特徴としては、(1)係数 α は、弾性のとき $\alpha=0$ 、全塑性のとき $\alpha=1$ 、弾塑性のとき α は0から1まで直線的に変化するという単純なパラメータであり、取り扱いが簡単である。(2)この α を用いることにより、塑性ヒンジ法に見られるような弾性から塑性への急激な変化が、なめらかに変化するように改良された。という点を挙げるができる。

<参考文献>

- 1) 渡辺昇、林川俊郎、岡田泰三：薄肉I形断面をもつ曲線格子桁の弾塑性解析に関する研究、北海道大学工学部研究報告、第126号、pp.1-14、1985
- 2) 山崎徳也、太田俊昭、石川信隆：補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析、土木学会論文集 No.134、pp.14-32、1966
- 3) Philip G. Hodge, Jr、倉西正嗣外共訳：構造物の塑性解析、コロナ社
- 4) 平沢秀之、佐藤浩一：塑性域の広がりを考慮した格子桁の弾塑性解析、土木学会北海道支部論文報告集、第49号、pp.13-16、1993

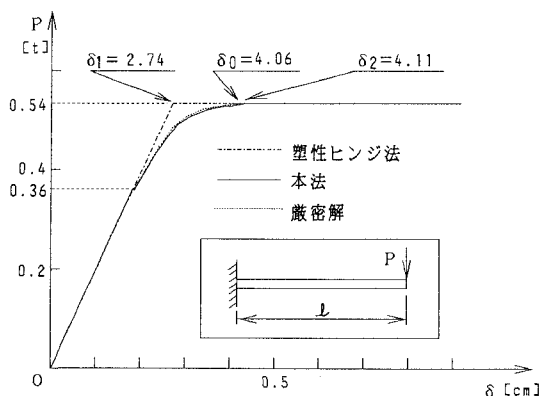


図-4 片持ばり

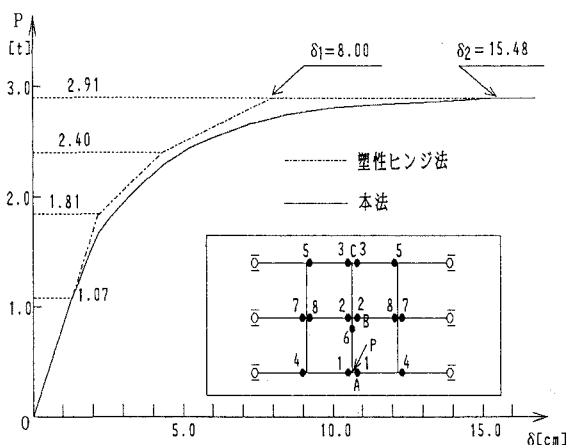


図-5 格子桁