

京都大学工学部	正	西村直志
京都府	非会員	古川篤
京都大学大学院	同上	菊田善哉
京都大学工学部	正	小林昭一

1. 序

本報では積分方程式法を用いたクラック形状決定逆問題の解法のうち、とくに3次元時間域動弾性問題、及び2次元Laplace問題における曲線クラック問題について最近得られた結果を述べる。

2. 3次元時間域動弾性問題

均質な等方線形弾性体の順問題を考える。 $\mathbb{R}^3$ 内のクラック S による入射弾性波 u_I の散乱問題の解は

$$u_i(x, t) = u_{Ii}(x, t) + \int_0^t \int_S \Gamma_{Iij}(x, y, t - \tau) \varphi_j(y, \tau) dS_y d\tau$$

と書ける。ここに φ は開口変位であり、 Γ_I は動弾性問題の2重層核である。クラックが traction free であるとき、開口変位は積分方程式

$$0 = (Tu_I)_i(x, t) + \int_0^t \int_S (T\Gamma_I)_{ij}(x, y, t - \tau) \varphi_j(y, \tau) dS_y d\tau \quad x \in S$$

を解いて求める。ここに Tu は u によって生じる表面力である。この超特異積分方程式の解法としてここでは変分法を用いる。原点から $\hat{x}$ の方向でクラックサイズに比べて十分遠い地点において散乱場 $u_S := u - u_I$ のP波成分を計測すると、これには遠方場近似が使えるので

$$u_{Si} \sim \frac{\hat{x}_i}{|x|} F(\hat{x}, T), \quad F(\hat{x}, T) = \int_S (\lambda \delta_{ij} + 2\mu \hat{x}_i \hat{x}_j) n_i(y) \dot{\varphi}_j(y, T + (\hat{x} \cdot y)/c_L) dS_y$$

となる。ここに $T := t - |x|/c_L$ であり、 c_L はP波の波速、 (λ, μ) はLamé常数である。

逆問題ではクラック S の位置や形状は未知である。これを決定するためにいくつかの既知の入射波 u_I^i ($i = 1, 2, \dots$) による S からの散乱波をいくつかの方向 $\hat{x}^j$ ($j = 1, 2, \dots$) でいくつかの時刻 T^k ($k = 1, 2, \dots$) に計測して散乱場の係数 F_0^{ijk} を得る。一方 S の幾何情報を適当に仮定して、同じ入射波、方向、時刻で観測される散乱場の係数を計算したものを $F^{ijk}(S)$ とする。計測に最も良く適合するクラックは $J(S) := \sum_{i,j,k} (F^{ijk}(S) - F_0^{ijk})^2$ を最小にするものとして決定して良いであろう。ここでは S を有限個のパラメータで記述し、 $J(S)$ をこれらのパラメータの関数としたうえで準ニュートン系の非線形計画法で最小化した。図1にはその様な数値計算例を示した。ここでは入射波は鉛直下方からの平面P波(x_3 軸正方向に進行するものとする) 一波とし、遠方場はback scatter方向のみとした。入射波形は $1 - \cos((c_L t - x_3)/a)$ ($\cos$ 以下が $(0, 2\pi)$ のとき。それ以外は0, a : 正解のクラック半径)である。このような計測からは多くの情報を得る事は出来ないが、 S の形状を、入射波の進行方向に平行で、その中心が x_3 軸上に拘束されている円形クラックと仮定すると幾何形状を決定することが可能になる。図1では観測結果の代わりに数値解析結果を逆解析の入力として用いた場合の収束状況の一例を示す。なお、Poisson比は1/4とした。

3. Laplace方程式の場合の曲線クラックの決定

これまで示してきた解析においては超特異積分方程式の解法として変分法を用いてきた。しかし、選点法による逆問題の解析も注意深く行えば可能である。特にクラック形状の自由度が大きくなると、順問題の解法を出来るだけ簡単なものにするのが計算効率の面から要請され、選点法の利用は有望である。その様な観点からここでは簡単のためにLaplace方程式に支配される逆問題を考え、曲線クラック形状の決定問題を選

点法を用いた積分方程式法を用いて解くことを試みる。なお、イメージを掴み易くするため弾性体の静的面外せん断を想定する。

まず順問題から考える。今 $\mathbb{R}^2$ に単一の曲線クラック S があるとする。この弾性体に無限遠方から既知の変位 u_I で書かれるようなせん断変形を加える。その結果発生する全変位 u は次式で書かれる：

$$u(x) = u_I(x) + \int_S G(x-y)\varphi(y)dS_y, \quad G(x) := -\frac{1}{2\pi} \log|x|.$$

開口変位 φ は上式の両辺を法線微分し、クラック上で0として得られる超特異積分方程式を解くことによって求められる。この積分方程式を選点法で数值的に解く場合には選点において C^1 連続性を持つ形状関数を用いなければならない。実用上は区分コンスタントの系統の形状関数がいられる事が多い。

逆問題ではクラックの形や位置は不明である。これを求めるためにいくつかの遠方場 u_I^i ($i=1,2,\dots$) を与え、クラック周辺のいくつかの点 x^j ($j=1,2,\dots$) に於て変位 u_0^{ij} を計測する。最も確からしい S は、この計測値と与えた S から計算によって求めた対応する変位 $u^{ij}(S)$ との差を表すコスト $J(S) = \sum_{i,j} (u^{ij}(S) - u_0^{ij})^2$ を最小にするものとして決定する。

数値計算においては区分コンスタントの形状関数を用い、クラック上の節点 $x^{(i)}$ ($i=0,\dots,n+1$) の座標を

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad x^{(j)} = x^{(j-1)} + \xi_0 l_j \begin{pmatrix} \cos \xi_{j+2} \\ \sin \xi_{j+2} \end{pmatrix} \quad (j=1,\dots,n+1)$$

とパラメータ表示する。ここに ξ_i ($i=0,\dots,n+3$) は形状パラメータ、 l_i は定数である。選点は $(x^{(i)} + x^{(i+1)})/2$ に取るのが普通である。コストを離散化して ξ_i の関数とし、準ニュートン法の系統の非線形計画法で最小化すれば逆問題が解ける。必要に応じてTikhonov等の安定化を考慮すればよい。

図2にはその様な解析の例を示した。分割は $n=20$ とし、観測点は原点(正解クラックの中点)中心、半径 $2a$ (a : 初期仮定の半クラック長) の円周上に40点取った。計測値は実験でなく逆解析に用いたものと異なる要素分割を用いて数値計算で求めたものを使用した。 $u_I^i = x_i$ ($i=1,2$) である。Tikhonovは用いていないが図に示す位置まで近付けることが出来た。

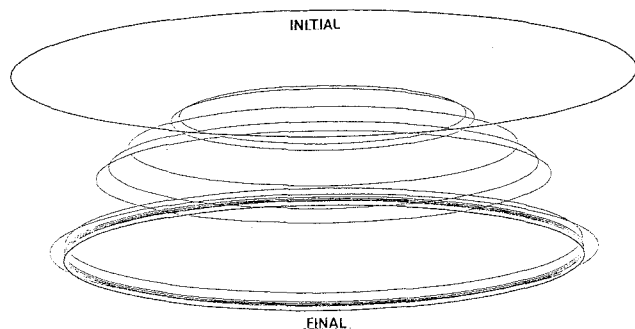


図1. 3次元時間域動弾性逆問題. 収束状況

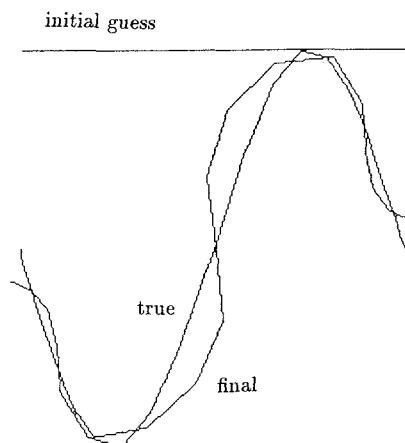


図2. 曲線クラックの決定.