I－606　変位仮定型の一般化高次理論による、層間すべりを生ずる複合材料の動的解析

福島工業高等専門学校　正員　根岸嘉和
山梨大学工学部　正員　平島健一

1　緒　言　　著者らの提案になる層状性合材料に関する変位仮定型の一般化高次理論[1]を、層間すべりが生ずる場合に対して拡張した理論[2]に、さらに動的項を加味した理論を連続条件緩和型の変分原理に基づいて定式化し、波動の分散関係ならびに層厚モードの解析例を示して精度の検証を行う。

2　理論の定式化　　解析対象とする層状性(N層)複合材料の構造と座標系を図-1 (a), (b)に示す。各記号の上付き括弧内数の[k]:k=1, 2, ･･･, N. は層番号を、同じく<k>:k=0, 1, 2, ･･･, N. は境界面番号を表す。

理論構築の出発点として、各層の変位成分 $u_i^{[k]}$; i=x, y, z. を基準化層厚座標：ζ（$\zeta=2z_k/h^{[k]}$）のべき級数展開(Mは理論次数)を用い次式のように仮定する。

$$u_i^{[k]}=\sum_{m=0}^{2M-1} u_{i(m)}^{[k]}\zeta^m . \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

各層の応力成分 $\sigma_{ij}^{[k]}$ は、一般的な異方性まで考慮し、次の幾何-構成関係式で与えられるものとする。

$$\sigma_{ij}^{[k]}=C_{ijkl}^{[k]}\{(u_{k,l}+u_{l,k})/2\}^{[k]} . \qquad \cdots\cdots (2)$$

また図１(c)に示す面内変位において、層間応力に比例した層間すべりが生じる場合を考慮し、変位の連続条件およびすべり条件として次式を導入する。

$$g_i^{\langle k\rangle}=\sum_{m=0}^{2M-1}\Big[\{u_{i(m)}^{[k]}-(-1)^m u_{i(m)}^{[k+1]}\} -\mu_i^{\langle k\rangle}\{C_{iz\alpha l}^{[k]}u_{l(m)}^{[k]}+\frac{m+1}{c_k}C_{izzl}^{[k]}u_{l(m+1)}^{[k]}\}\Big]=0 . \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

なお変位の連続条件は、上式において滑り係数[3]を $\mu_i^{\langle k\rangle}=0$ と置くことによって与えられる。

以上の仮定のもとに式(3)の変位の連続・すべり条件の $g_i^{\langle k\rangle}$ にLagrange未定乗数 $\sigma_{iz}^{\langle k\rangle}$ を乗じて汎関数中に考慮した Hamilton原理を用い、独立変量を $u_{i(m)}^{[k]}$ および $\sigma_{iz}^{\langle k\rangle}$ にとった変分演算を実施した後、厚さ方向積分と時間tに関する部分積分を実施する。この結果を整理し最終的に次式が得られる。

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\Big[\sum_{k=1}^{N}\Big[\sum_{n=0}^{2M-1}\Big\{\iint\big(\delta u_{i(n)}^{[k]}[\sigma_{i\alpha,\alpha}^{(n)} -n\sigma_{iz}^{(n-1)}+f_i^{(n)}+F_i^{(n)}-\rho\ddot{u}_i^{(n)}]^{[k]}\big)dxdy -\oint\big(\delta u_{i(n)}^{[k]}[n_\alpha\{(\sigma_{\alpha j}^{(n)})_s +\mu_j^{\langle k\rangle}\sigma_{jz}^{\langle k\rangle}C_{jz\alpha i}\}-\bar{t}_i^{(n)}]^{[k]}\big)ds\Big\}\Big] +\sum_{k=1}^{N-1}\iint\delta\sigma_{iz}^{\langle k\rangle}g^{\langle k\rangle}dxdy\Big]=0 . \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

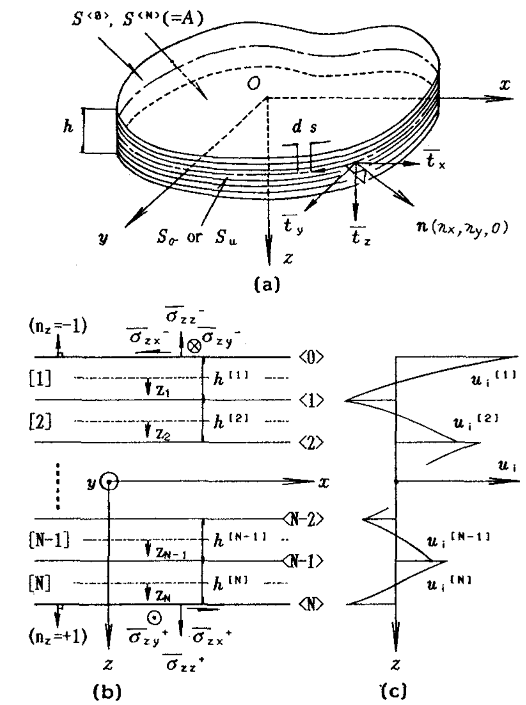
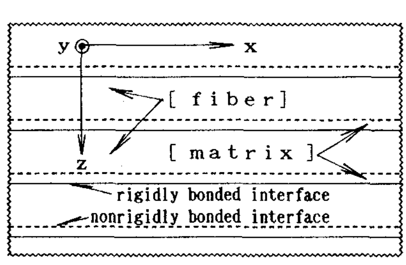


図-１　層状性複合材料と座標系および変位の仮定



[fiber]　：G_f, ρ_f, ν_f ; h_f.
[matrix]　：G_m, ρ_m, ν_m ; h_m.
$G_f/G_m=100$, $\nu_f=0.30$
$\rho_f/\rho_m=3.0$, $\nu_m=0.35$, $h_m/h_f=0.25$

図-２　等方性2層の多重積層構造の形状と材料定数

なおﾄﾞｯﾄ(・)は時間ｔに関する偏微分を表し、ｺﾝﾏ(,)の後の添字はその座標に関する偏微分を表す。またﾗﾃﾝ添字はx, y, zをとり、ｷﾞﾘｼｬ添字は面内座標x, yをとるものとし、繰り返し添字には総和規約を適用する。$n_\alpha^{[k]}$は側端面における法線の方向余弦である。

式(4)中の層ごとの各物理量の高次ﾓｰﾒﾝﾄは次式：

$$\{\sigma_{ij}^{(n)};\ f_i^{(n)};\ t_i^{(n)}\} = \int_{-1}^{1}\{\sigma_{ij}^{[k]};\ f_i^{[k]};\ t_i^{[k]}\}\,\zeta^n d\zeta\ ,$$

$$F_i^{(n)} = \{\sigma_{iz}^{\langle k\rangle} - (-1)^n \sigma_{iz}^{\langle k-1\rangle}\} - \mu_j^{\langle k\rangle}\{-\frac{m}{C_k}\sigma_{jz}^{\langle k\rangle} C_{izjz}^{[k]} - \sigma_{jz,\alpha}^{\langle k\rangle} C_{i\alpha jz}^{[k]}\},$$

$$\rho^{(m,n)} = \int_{-1}^{1}\rho^{[k]}\zeta^m\zeta^n d\zeta\ . \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

で与えられる。なお、$f_i^{[k]}$は物体力，$t_i^{[k]}$は側端面荷重，$\rho^{[k]}$は質量密度をそれぞれ表す。

式(4)より、支配式として各層ごとの運動方程式ならびに層接合面での変位の連続・すべり条件が得られるとともに、側端面での境界条件式が得られる。

本理論のM次理論でN層の3次元構造を解析する場合の未知量は、変位係数$u_{i(m)}^{[k]}$:6NM個とLagrange乗数$\sigma_{iz}^{\langle K\rangle}$:3(N-1)個の合計6NM+3(N-1)個となる。

3　数値計算例　本理論の精度を検証するため、図-2に示すような2種の等方性層よりなる多重積層構造で一つおきの層接合面にすべりが生ずる特殊な場合について、層に平行なx-軸方向に伝播する平面調和波(波数k, 位相速度c)の分散解析を実施した。

図-3はすべりが生じない$\bar{\mu}$=0(厳密解はSunら[4])から完全にすべる$\bar{\mu}$=∞までの幾つかの$\bar{\mu}$に対する第1次と第2次ﾓｰﾄﾞの分曲線を本理論の収束値(3次理論値)で示したものである。図-4は第1次ﾓｰﾄﾞの$\bar{k}$=1.0における面内変位の層厚ﾓｰﾄﾞの$\bar{\mu}$に対する変化を、収束(2次理論)値で示している。図-5は$\bar{\mu}$=1の場合の第1次から第6次まで各ﾓｰﾄﾞの波動の位相速度ｽﾍﾟｸﾄﾙを本理論の収束(4次理論)値で示したものである。

以上より本理論は層間すべりを生ずる層状性複合材料の動的挙動を精密に解析できることが検証された。

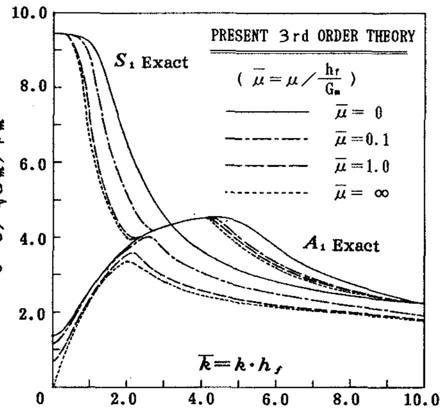


図-3　$\bar{\mu}$の変化と第1次、第2次モードの分散曲線

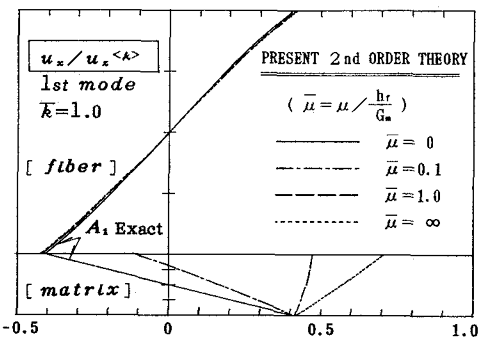


図-4　第1次ﾓｰﾄﾞの面内変位ｕxの層厚ﾓｰﾄﾞ($\bar{k}$=1.0)

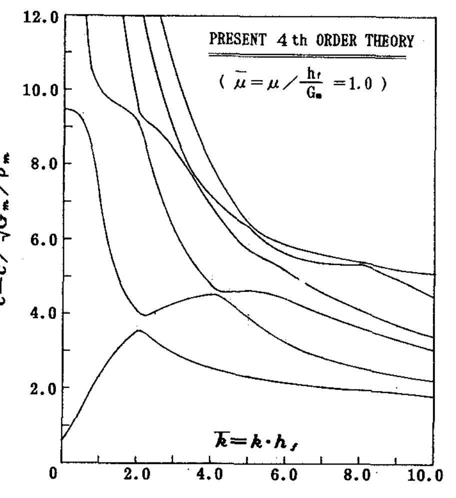


図-5　第1次～第6次モードの波動分散曲($\bar{\mu}$=1)

参考文献　(1) 根岸・平島：日本機械学会論文集(A編)，58巻，554号(1992)，pp. 161-168.　(2) 根岸・西沢：土木学会東北支部技術研究発表会概要，(1993)，pp. 22-23.　(3) Lu, X. & Liu, D.：AIAA J., Vol. 30, No4(1992), pp. 1063-1073.　(4) Sun, C. T., Achenbach, J. D. & Herrmann, G.：J. Appl. Mech., Vol. 35(1968), pp. 408-411.