I－605　面外荷重下におけるすべりを含む２個の円形介在物を有する弾性体の基本解

山梨大学工学部　正　員　平島　健一
山梨大学大学院　学生員○杉坂　憲明

1．はじめに

二次元平面状態下の無限に拡がった領域に無限遠より働く面外せん断荷重や有限位置に集中力,あるいは点転位などの特異荷重ないし撹乱が作用した場合の標題の問題は,その工学的な重要性ならびに他への応用性から閉じた型の解析解を求める試みが従来よりなされている.

本論文では,２個の円形介在物を有し,その介在物が中空や弾性体または剛体の場合についての面外の無限遠荷重や有限位置に特異荷重や転位などの撹乱が作用した場合のすべりを含む標題の問題の応力ならびに変位についての一般的な解析式を誘導する.

2．応力・変位を求める公式

対象となる応力・変位成分はx_1x_2平面に垂直な方向の座標をx_3として,面外せん断応力$\tau_{x_1x_3}$, $\tau_{x_2x_3}$および変位u_{x_3}であり,いずれも面内座標(x_1,x_2)のみの関数である.物体力を無視した釣合方程式および構成式は次式のように与えられる.

$$\frac{\partial\tau_{x_1x_3}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{x_2x_3}}{\partial x_2}=0 \quad , \quad \tau_{x_1x_3}=\mu\frac{\partial u_{x_3}}{\partial x_1} \quad , \quad \tau_{x_2x_3}=\mu\frac{\partial u_{x_3}}{\partial x_2} \quad . \quad \cdots(1)$$

ここに,μはせん断弾性係数である.
図１に示すように円形境界Lを有する無限に拡がった領域を複素平面$z=x_1+ix_2$とする.円形境界Lに沿う極座標系(r,θ)の任意点における応力・変位を求める公式は,複素関数$\phi(z)$を用いて次式のように与えられる.

$$\tau_{\theta x_3}+i\tau_{rx_3}=e^{i\theta}\,\phi'(z) \quad , \quad u_{x_3}=Im[\phi(z)] \quad . \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

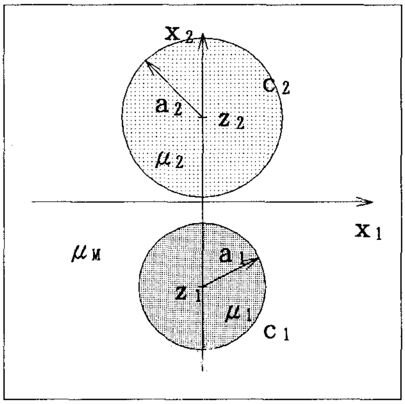

図１　２個の円形介在体を有する弾性体の幾何形状

3．２個の円形介在物を有する場合の基本解

図１のように媒体・介在物が存在している場合,次の式を定義する.

$$A_iz=\frac{a_i}{\bar{z}_i-\bar{z}}+z_i \quad , \quad \alpha_i=\frac{\mu_i(1-c_i)-\mu}{\mu_i+\mu} \quad , \quad (i=1,2) \quad . \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ここに,z_1,z_2はそれぞれの介在物の中心;a_1,a_2はそれぞれの介在物の半径;μ_1,μ_2はそれぞれのせん断弾性係数,c_1,c_2はそれぞれの境界でのすべり係数とする.
境界条件として

(I) 応力の連続性　$\tau_{rx_3}^{(I)}=\tau_{rx_3}^{(M)}$,　(II)変位のすべり条件　$\tau_{rx_3}^{(M)}=\tau_{rx_3}^{(I)}=1/c(u_{x_3}^{(M)}-u_{x_3}^{(I)})$,　$(z=ae^{i\theta})$.

これらを踏まえて一般式は次のようになる.

媒体内:

$$\phi_M(z)=\phi(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^n\phi(M^nz)+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^n\phi(N^nz)+\alpha_2\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^n\overline{\phi(A_2M^nz)}+\alpha_1\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^n\overline{\phi(A_1N^nz)} , \quad (4)$$

1番目の介在物内: $$\phi_{I1}(z)=(1+\alpha_1)\{\phi(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^n\phi(M^nz)+\alpha_2\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^n\overline{\phi(A_2M^nz)}\} \quad , \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

2番目の介在物内: $$\phi_{I2}(z)=(1+\alpha_2)\{\phi(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^n\phi(N^nz)+\alpha_1\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^n\overline{\phi(A_1N^nz)}\} \quad . \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

ここで２円が接触していないとき,次式が成立する.

$$\left.\begin{aligned} M^nz&=\frac{(\gamma_2k^n-\gamma_1)z+\gamma_1\gamma_2(1-k^n)}{(k^n-1)z+\gamma_2-k^n-\gamma_1} \quad , \qquad N^nz=\ \cdots\cdots \ , \\ \overline{A_2M^nz}&=\frac{\{(a_2^2-|\,z_2\,|^2)(k^n-1)+\overline{z_2}(\gamma_2k^n-\gamma_1)\}z+(a_2^2-|\,z_2\,|^2)(\gamma_2-\gamma_1k^n)+\overline{z_2}\gamma_1\gamma_2(1-k^n)}{\{\gamma_2k^n-\gamma_1-z_2(k^n-1)\}z+\gamma_1\gamma_2(1-k^n)-z_2(\gamma_2-k^n\gamma_1)} \ , \\ \overline{A_1N^nz}&=\ \cdots\cdots \ . \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

ここに, $$\gamma_1=\frac{a_1^2-a_2^2+(z_2+z_1)(\overline{z_2}-\overline{z_1})+\sqrt{\Delta}}{2(\overline{z_2}-\overline{z_1})} \quad , \quad \gamma_2=\cdots\cdots \quad , \quad k=\frac{A-\sqrt{\Delta}}{A+\sqrt{\Delta}} \quad . \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$A=a_1^2+a_2^2-|\,z_1\,|^2-|\,z_2\,|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 \quad , \quad \Delta=(a_1^2+a_2^2-|\,z_2-z_1\,|^2)^2-4a_1^2a_2^2 \quad . \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

また２円が接触しているとき,次式が成立する.

$$\left.\begin{aligned} M^n z &= \frac{(1+nl\gamma)z - nl\gamma^2}{nl(z-\gamma)+1}\ , \qquad N^n z = \ \cdots\cdots\ , \\ \overline{A_2 M^n z} &= \frac{\{(a_2^2 - |\,z_2\,|^2)nl + \overline{z_2}(1+nl\gamma)\}z + (a_2^2 - |\,z_2\,|^2)(1-nl\gamma) + \overline{z_2}nl\gamma^2}{(1+nl\gamma - nlz_2)z - nl\gamma^2 + z_2(nl\gamma - 1)}\ , \\ \overline{A_1 N^n z} &= \ \cdots\cdots\ . \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(10)$$

$$ここに,\quad \gamma = \frac{a_1^2 - a_2^2 + (z_1+z_2)(\overline{z_2}-\overline{z_1})}{2(\overline{z_2}-\overline{z_1})}\ , \qquad l = \frac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{a_1 a_2}\ . \qquad \cdots\cdots(11)$$

以上がすべりを含む２個の円形介在物を有する弾性体の基本解となる. また各種の問題の一般解を求めるには式(4)~(5)の主要部 $\phi(z)$ に次式を代入して得られる.

Ⅰ.無限遠から一様な面外せん断荷重が作用する場合. $\phi(z) = (\tau_{x_2x_3}^{\infty} + i\,\tau_{x_1x_3}^{\infty})\,z$ ……(12)

Ⅱ.領域内の一点に面外からの集中力 Z
　　および面外方向の点転位 $[u_{x_3}^*]$ が作用する場合. $\phi(z) = \dfrac{\mu_M[u_{x_3}^*] - iZ}{2\pi}\ln(z - z_0)$ ……(13)

４．数値計算例

面外方向の集中力 Z が作用する場合,各すべり係数 c が完全連続(perfect bonding i.e.c=0)から完全すべり(perfect sliding i.e.c=2.0)の全範囲にわたって変化する場合の応力分布を式(6)~(8)および式(13)を微分し計算する.図２,図３にその結果を示す.

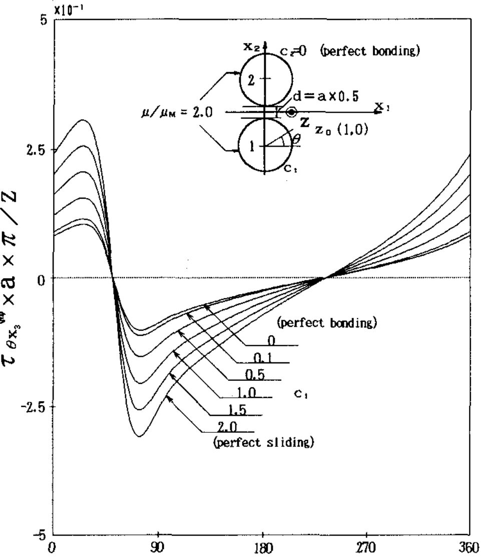

図２　片側の介在物のすべり係数を変化させたときの　$\tau_{\theta x_3}^{(M_1)}$

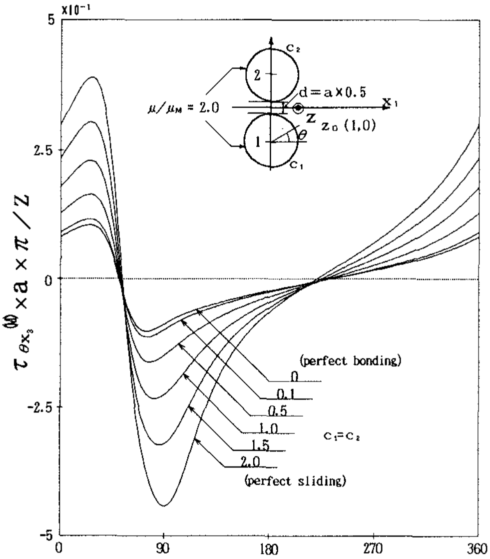

図３　両側の介在物のすべり係数を変化させたときの　$\tau_{\theta x_3}^{(M_1)}$

５．おわりに

本報告では,２個の円形介在物を有し,その境界面で応力に比例して相対すべりが生じる弾性体の基本解の誘導を行い,また無限遠より働く面外せん断荷重や任意の有限位置に集中力および点転位が作用する問題の解析解を求めた. また,数値計算例としてこれらの解を用いて集中力が働く場合のすべり問題についての応力分布を示した.

参考文献
(1) E.Honein・T.Honein・G.Herrmann,Qaurterly of Applied Mathematics 3-L,(1992),479.
(2) 平島・木村・広瀬,機論,57-540,A(1991),211.
(3) 田中・平島・広瀬・T.MURA,機論,58-549,A(1992),77.
(4) 森口,２次元弾性論,(1957),70,岩波書店.