

南京大学声学研究所 印 建華
東海大学海洋学部 正 員 ○北原 道弘

1. はじめに

材料の界面をモデル化するに当たり、簡単かつ用途の広さから、界面に分布したスプリングモデルあるいはスプリング・マスモデルがよく利用されている。実際にモデルを実験と対応して利用する場合、モデルの適用可能域を確認しておくことが必要と思われる。ここでは、界面モデルによる超音波の反射と透過という観点から、スプリングモデルの適用可能域について検討してみたので報告する。

2. 界面層による平面波の反射と透過

まず、近似を含まない弾性界面層について考える。Fig.1に示すように弾性物質 D^1 と D^2 の界面を、厚さ h の弾性界面層 D^0 としてモデル化する。入射波は図に示す入射角 θ_I で領域 D^1 内を伝播する次のような平面波である。

$$u_i^{1,I} = A^{1,I} d_i^{1,I} \exp[ik^{1,I}(p_k^{1,I} x_k - c^{1,I} t)], \quad I = P^+ \text{ or } S^+ \quad (1)$$

上付き指標の1は領域 D^1 内の物理量を、 A は振幅、 d_i は偏向ベクトル、 k は波数、 p_k は波動の進行方向を表す伝播ベクトル、 c は波速である。このとき、領域 D^1 内への反射波 $u_i^{1,I}$ 、領域 D^2 への透過波 $u_i^{2,m}$ 、界面層 D^0 内に生じる波動 $u_i^{0,n}$ は次のように書ける。

$$u_i^{1,I} = A^{1,I} d_i^{1,I} \exp[ik^{1,I}(p_k^{1,I} x_k - c^{1,I} t)], \quad I = P^-, S^-$$

$$u_i^{2,m} = A^{2,m} d_i^{2,m} \exp[ik^{2,m}(p_k^{2,m} x_k - c^{2,m} t)], \quad m = P^+, S^+$$

$$u_i^{0,n} = A^{0,n} d_i^{0,n} \exp[ik^{0,n}(p_k^{0,n} x_k - c^{0,n} t)], \\ n = P^+, S^+, P^-, S^- \quad (2a, b, c)$$

各領域内の変位を微分して、応力は次のようになる。

$$\sigma_{ij}^{I,J} = A^{I,J} s_{ij}^{I,J} \exp[ik^{I,J}(p_k^{I,J} x_k - c^{I,J} t)] \quad (3)$$

ここに、 s_{ij} は変位-応力関係から生じた d_i 、 p_j 、波数、各領域の弾性係数に關係する量である。

連続条件は、 $x_2 = 0$ と h で変位と応力の連続性を仮定して次のようになる。

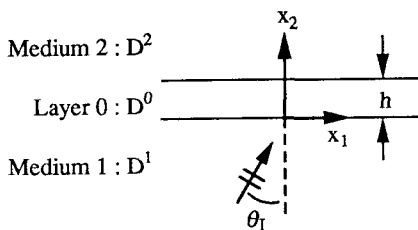


Fig.1 Interface layer.

$$u_i = u_i^{1,I} + \sum_l u_i^{1,l} = \sum_n u_i^{0,n}, \\ \sigma_{2i} = \sigma_{2i}^{1,I} + \sum_l \sigma_{2i}^{1,l} = \sum_n \sigma_{2i}^{0,n}, \quad \text{on } x_2 = 0 \quad (4a)$$

$$u_i = \sum_m u_i^{2,m} = \sum_n u_i^{0,n}, \\ \sigma_{2i} = \sum_m \sigma_{2i}^{2,m} = \sum_n \sigma_{2i}^{0,n}, \quad \text{on } x_2 = h \quad (4b)$$

入射波と反射・透過波及び界面層内の変位場と応力場の表現 (1), (2), (3) を連続条件 (4) に代入して、整理すると次のようになる。

$$[u_1, u_2, \sigma_{12}, \sigma_{22}]^T = Q^{1,I} A^{1,I} + Q_1^- \begin{bmatrix} A^{1,P^-} \\ A^{1,S^-} \end{bmatrix} \\ = Q_0^+ \begin{bmatrix} A^{0,P^+} \\ A^{0,S^+} \end{bmatrix} + Q_0^- \begin{bmatrix} A^{0,P^-} \\ A^{0,S^-} \end{bmatrix} \quad \text{on } x_2 = 0 \quad (5a)$$

$$[u_1, u_2, \sigma_{12}, \sigma_{22}]^T = Q_2^+ E_2^+ \begin{bmatrix} A^{2,P^+} \\ A^{2,S^+} \end{bmatrix} \\ = Q_0^+ E_0^+ \begin{bmatrix} A^{0,P^+} \\ A^{0,S^+} \end{bmatrix} + Q_0^- E_0^- \begin{bmatrix} A^{0,P^-} \\ A^{0,S^-} \end{bmatrix} \quad \text{on } x_2 = h \quad (5b)$$

ここに、 $Q_I^\pm$ と $E_I^\pm$ は次のような既知量である。

$$Q_I^\pm = [q^{I,P^\pm}, q^{I,S^\pm}], \quad E_I^\pm = \text{diag}[e^{I,P^\pm}, e^{I,S^\pm}]$$

$$q^{I,J} = [d_1^{I,J}, d_2^{I,J}, s_{12}^{I,J}, s_{22}^{I,J}]^T, \quad e^{I,J} = \exp\{ik^{I,J} p_2^{I,J} h\} \quad (6)$$

式 (5) において、入射波の振幅 $A^{1,I}$ を与えると、未知量は A^{1,P^-} 、 A^{1,S^-} 、 $A^{0,P^\pm}$ 、 $A^{0,S^\pm}$ 、 A^{2,P^+} 、 A^{2,S^+} の計 8 個であり、計 8 個の条件式 (5) より、これらの未知量を決定できる。このとき、領域 D^1 側への縦波と横波の反射係数 R_L と R_T 、領域 D^2 側への透過係数 T_L と T_T は次のように書ける。

$$R_L = A^{1,P^-} / A^{1,I}, \quad R_T = A^{1,S^-} / A^{1,I} \\ T_L = A^{2,P^+} / A^{1,I}, \quad T_T = A^{2,S^+} / A^{1,I} \quad (7)$$

式 (5) より、界面層 D^0 の上・下面の変位と応力場の関係を整理すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ \sigma_{12}^0 \\ \sigma_{22}^0 \end{bmatrix}, \quad B = Q_0 E_0^{-1} Q_0^{-1} \quad (8)$$

ここに、 Q_0 と E_0 は

$$[Q_0] = [Q_0^+, Q_0^-], \quad E_0 = \begin{bmatrix} E_0^+ & 0 \\ 0 & E_0^- \end{bmatrix} \quad (9)$$

であり、 $Q_0^\pm$ と $E_0^\pm$ は式 (6) に定義されている。

3. Rokhlin-Wangの界面モデル

界面層の上・下面の変位と応力との関係式(8)には、層の厚さ h が小さいという仮定は含まれていない。界面層の厚さ h が小さいという仮定のもとに、薄層の上・下面上の変位と応力との関係を導いたものに Rokhlin と Wang の研究¹⁾がある。以後の説明の都合上、彼等の結果を式(8)と同型の伝達マトリックスとして整理すると次のようになる。

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & -\frac{1}{K_t} & 0 \\ \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} b_{12} & 1 & 0 & -\frac{1}{K_n} \\ \omega^2 m_p & 0 & 1 & \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} b_{12} \\ 0 & \omega^2 m_n & b_{12} & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここに、変位の干渉項 b_{12} 、分布スプリング定数に対応する K_t 、 K_n 、および分布マス m_n 、 m_p は次のようである。

$$b_{12} = ik^{1,I} h \sin \theta_I, \quad K_t = \frac{\mu_0}{h}, \quad K_n = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{h}$$

$$m_n = \rho h, \quad m_p = [1 - 4 \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} (\frac{k^{1,I}}{k^{0,S}} \sin \theta_I)^2] \rho h \quad (11)$$

また、 λ_0 と μ_0 は界面層のラメ定数である。

4. 分布スプリングマスモデル

Rokhlin-Wang モデル(10)において、変位の干渉項 b_{12} を無視して、次のスプリングマスモデルに対する伝達マトリックスを得る。

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{K_t} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{K_n} \\ \omega^2 m_p & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 m_n & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

5. 分布スプリングモデル

さらに、界面マスの影響を無視すると、式(12)は次のようになる。

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{K_t} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{K_n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

上式を界面の上・下面の応力と変位で表現すると、次のようになる。

$$\sigma_{12} = K_t(u_1' - u_1'), \quad \sigma_{22} = K_n(u_2' - u_2')$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{12}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{22} \quad (14)$$

上記過程から明らかなように、スプリングモデルの成立条件は一般に次のように書ける。

$$h \ll \lambda^0 \quad \text{又は} \quad k^0 h \ll 1 \quad (15)$$

ここに、 h は界面層厚、 λ^0 と k^0 は界面層内を伝播する波の波長と波数である。

6. 計算結果

Fig.2 に各界面モデルによる縦波と横波の反射率 R_L と R_T 、縦波と横波の透過率 T_L と T_T をまとめて示す。入射

波は入射角を $\theta_I = 30^\circ$ とする平面縦波であり、図の横軸は界面層厚 h で無次元化した界面層内の縦波の波数 $hk^{0,L}$ である。図の右端の数値は、先に示した4つの界面モデルを示す。

- 1: 近似を含まない弾性界面層(式(8))
- 2: Rokhlin-Wang モデル(式(10))
- 3: 分布スプリングマスモデル(式(12))
- 4: 分布スプリングモデル(式(13))

各近似モデルの理論上の成立範囲は $hk^{0,L} \ll 1$ であるが、実際に計算してみると、各モデルとも $hk^{0,L} < 1$ では、ほぼ近似を含まない弾性界面層の結果に追従していることがわかる。

Fig.3 は、縦波の入射角 $\theta_I = 0$ の場合について、 $hk^{0,L}$ をさらに大きくした場合の反射・透過率を、近似を含まない弾性界面層と分布スプリングモデルについてまとめたものである。無次元化波数 $hk^{0,L}$ が1を越えると、両者の結果は著しく異なり、特に、スプリングモデルでは界面層間の波動の干渉現象($hk^{0,L} = n\pi$)は表現できないことがわかる。

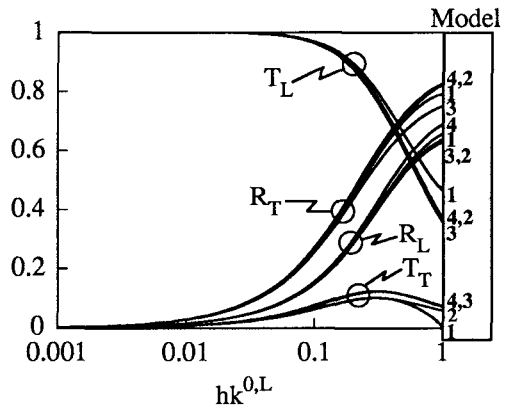


Fig.2 Reflection and transmission coefficients.

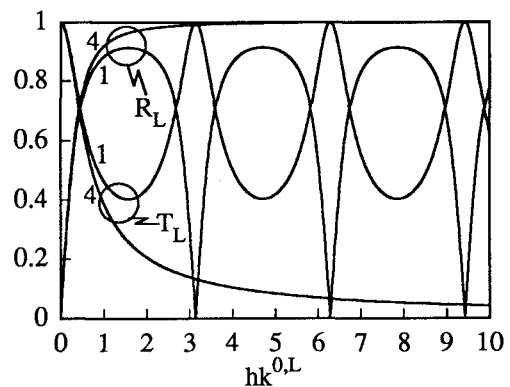


Fig.3 Reflection and transmission coefficients.

参考文献

- 1) Rokhlin, S.I. and Wang, Y.J.: Analysis of ultrasonic wave interaction with imperfect interface between solids, Review of Progress in QNDE, Vol. 10A, pp. 185 - 192, 1991.