

I - 583

Euler 角および空間固定直交座標三軸回りの

微小回転角を用いた空間骨組解析

東北大学 学生員 後藤文彦

東北大学 正員 倉西 茂

東北大学 正員 岩熊哲夫

1. まえがき

空間骨組の有限変位解析を定式化する上でまず問題となるのは、有限回転角を線形ベクトルとして扱えないという点である。有限回転角を表現する方法の一つとして、回転の順番が決められた Euler 角を用いる方法がある。Euler 角は幾何学的考察をする上では便利であるが、対応するモーメント外力の物理的意味は不明瞭になり、同時に幾何学的境界条件として Euler 角を与えることも場合によっては明確ではない。また、有限要素法において各分割要素の接線剛性マトリクスを重ね合わせる際にも、Euler 角では不都合が生じる。そこで、Euler 角の微小回転角と空間固定直交座標三軸回りの微小回転角との変換式を導入し、最終的に解くべき増分式における節点モーメント外力と節点回転変位が、空間固定直交座標三軸回りの諸量となるような明解な定式化を試みる。

2. 数値解析手法の定式化

直線棒要素に対して、次式のような剛体変位除去に基づく total-Lagrangian 手法による剛性方程式を定式化する。

$$F = T(D)KT^T(D)d(D) \quad (1)$$

ここに F は節点力ベクトル、 T は Euler 角で表される座標変換マトリクス、 K は線形剛性マトリクス、 d は節点2の節点1に対する相対変位ベクトル、 D は節点変位ベクトル(但し回転角成分は Euler 角)である。式(1)の D に関する増分式は次のように表せる。

$$\Delta F = K_t(D)\Delta D \quad (2)$$

ここに K_t は接線剛性マトリクスである。但し ΔF のモーメント成分は空間固定直交座標三軸回りについて定義されており、 ΔD の回転角成分は Euler 角として定義されているため、このままでは接線剛性マトリクスの重ね合わせが困難である。そこで次の変換式を導入する。まずここで言う Euler 角とは、直交座標 (x, y, z) において、 y -軸右ねじ回りに γ だけ回転させ、その回転後の x -軸左ねじ回りに α だけ回転させ、その回転後の z -軸右ねじ回りに ϕ だけそれぞれ順番に回転させたものとして定義している。空間固定直交座標三軸回りの微小回転角を $(\Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z)$ とすると、Euler 角の微小回転角 $(\Delta\alpha, \Delta\gamma, \Delta\phi)$ と $(\Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z)$ の間には次の関係が成立する¹⁾。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\gamma \\ \Delta\phi \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ -\sin\gamma \tan\alpha & 1 & -\cos\gamma \tan\alpha \\ \sin\gamma/\cos\alpha & 0 & \cos\gamma/\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z \end{Bmatrix} \quad (3)$$

この関係式により増分式(2)の節点変位ベクトル増分 ΔD 中の回転角成分は空間固定直交座標三軸回りの微小回転角に変換され、接線剛性マトリクスの重ね合わせが可能となる。こうして組み立てられる非線形代数方程式を弧長法によって繰り返し収斂計算する。

3. 数値解析

解析解の存在する問題として円弧ばりの横倒れ座屈を解析する。解析に用いる材料の諸元は、ヤング率 $E = 2.00000 \times 10^2 (GPa)$ 、せん断弾性係数 $G = 7.72000 \times 10 (GPa)$ 、部材軸長 $L = 1.02440 \times 10 (m)$ 、断面積 $A = 9.28800 \times 10^{-2} (m^2)$ 、強軸回りの断面二次モーメント $I_x = 1.13630 \times 10^{-4} (m^4)$ 、弱軸回りの断面二次モーメント $I_y = 3.87100 \times 10^{-5} (m^4)$ 、ねじり定数 $J = 5.89000 \times 10^{-7} (m^4)$ 、そりねじり定数 $I_w = 5.55869 \times 10^{-7} (m^6)$ とする。

(1) 座屈前の面内変位を無視した場合

まず Vlasov の解析解²⁾と比較する目的で、座屈前の面内変位の影響が出ないように面内剛性を非常に大きくした円弧ばりを解析する。具体的には前述の諸元のうち I_x のみを 10^6 倍大きくして解析した(図-1)。最低次の不安定点は開角 0° から 179° までは Vlasov の一次モードに重なり、 181° から 359° までは二次モードに重なっている。二番目の不安定点は、開角 0° から 179° までは Vlasov の二次モードに重なり、 181° から 359° までは三次モードに重なっている。

(2) 座屈前の面内変位を無視しない場合

比較対象とする解を用意するために Vlasov の解析解を次のように修正する。曲率 $(1/R)$ の関数として与えられる座屈公式 $M_{cr} = f(1/R)$ に、座屈時の曲率 $(1/R_{cr}) = \text{初期曲率}(1/R_0) + \text{面内変位による付加曲率}(M_{cr}/EI_x)$ を代入して M_{cr} について解くと、以下の式が得られる。

$$M_{cr} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4)$$

$$a = -1 + \frac{EI_y}{EI_x} + \left(\frac{1}{EI_x} - \frac{EI_y}{E^2 I_x^2} \right) \left(\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} EI_\omega + GJ \right)$$

$$b = \frac{1}{R} \left\{ EI_y + \left(1 - 2 \frac{EI_y}{EI_x} \right) \left(\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} EI_\omega + GJ \right) \right\}$$

$$c = EI_y \left(\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} - \frac{1}{R^2} \right) \left(\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} EI_\omega + GJ \right)$$

これを修正 Vlasov の解とする。先に示す諸元を有す円弧ばりを解析した(図-2)。最低次の不安定点は開角 0° から 179° までは修正 Vlasov の一次モードに重なり、 181° から 359° までは二次モードに重なっている。二番目の不安定点は、開角 0° から 179° までは修正 Vlasov の二次モードに重なり、 181° から 359° までは三次モードにほぼ重なっている。

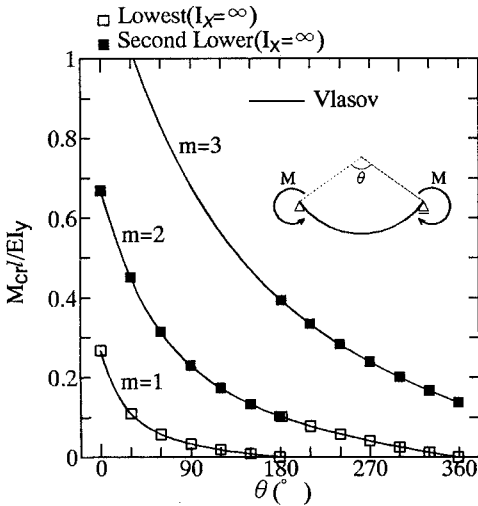
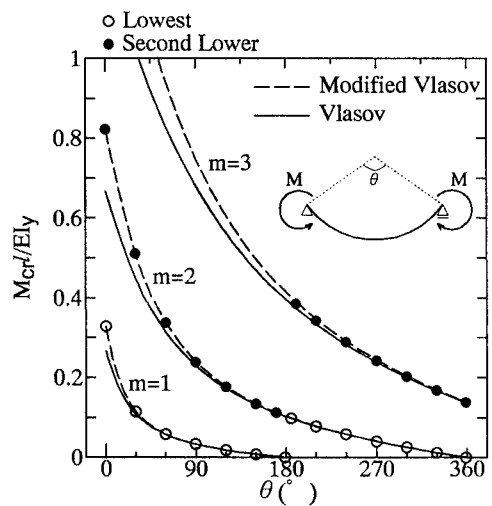

 図-1 円弧ばりの横倒れ座屈($I_x=\infty$)


図-2 円弧ばりの横倒れ座屈

4. 結論

面内に剛な円弧ばりの横倒れ座屈に対する本数値解は Vlasov の解析解によく一致した。また、面内に比較的柔な円弧ばりの横倒れ座屈に対する本数値解は、修正 Vlasov の解に一致した。以上から、本研究で提案した簡潔な定式化による空間骨組解析の可能性を示した。

参考文献

- 1) B.Etkin: *Dynamics of Flight*, John Wiley, 1959.
- 2) V.Z. ウラソフ著、奥村敏恵 外訳：薄肉弾性ばりの理論、技報堂、東京、1967.