I－532　　放射状領域分割による破壊確率計算法

防衛大学校土木工学科　香月　智
防衛大学校土木工学科　石川信隆

１．緒　言

信頼性解析の数値計算手法として、ＦＯＲＭまたはＳＯＲＭが用いられることが多い[1)]。ＦＯＲＭは、標準化された正規分布確率変数空間（平均値$\overline{x}=0$、標準偏差$\sigma_x=1.0$）での性能関数（g_x）上において、原点からの最小距離を与える点（設計点とも呼ばれる）を求めることによって、またＳＯＲＭは設計点での性能関数の曲率を求めることによって、比較的簡易に破壊確率を求めることができる。しかし、この方法は複数の変曲点や設計点を有する性能関数や、複数の性能関数の複合によるシステム信頼性解析に対しては、適切な破壊領域の近似が行われない。モンテカルロ法は、性能関数の非線形性やシステム化の影響を受けない反面、数値計算負担が大きいという難点がある。そこで本研究は、標準化された確率空間を原点まわりに放射状に分割し、その分割領域ごとに部分破壊確率を計算することにより、モンテカルロ法と同様な非線形およびシステム信頼性解析への適用性を有し、かつより計算効率の高い破壊確率計算手法を提案したものである。

２．解析手法および基本式

図－１に示すように、原点まわりで放射状に等分割された領域の概念を導入する。ここに超球面による性能関数[2)]を設けると、一つの放射状分割領域における超球面セグメントに対応する破壊領域の確率P_{fi}は、次式によって与えられる。

$$P_{fi}=\{1-\chi^2_n\ (D_i^2)\}/m \tag{1}$$

ここで、χ^2_n：n次確率変数空間のカイ二乗分布の確率積分、D_i：i番目の部分領域における原点から性能関数までの距離、m:分割数。次に、一般的な性能関数に対する部分分割された破壊領域の割当を、図－２に示すように実性能関数と部分分割領域の中心線との交点に設置された超球面セグメントによって代用できるものとすると、実性能関数に対する破壊確率P_fは、次式によって与えられる。

$$P_f=\sum_{i=1}^{m} P_{fi} \tag{2}$$

ここで、D_iは各部分領域ごとに与えられる単位中心線ベクトルx^*_i（図－２）を用いると、次の限界状態を満足する解として、ニュートン法等を用いて簡易に計算できる。

$$g_x\ (D_i x^*_i)\ =0 \tag{3}$$

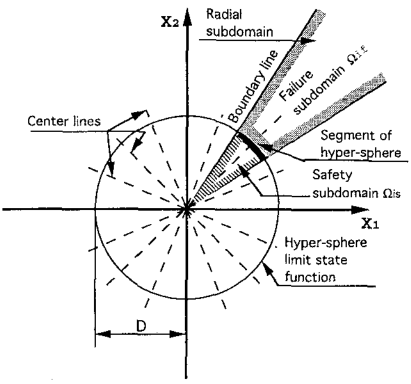
単位中心線ベクトルx^*は、標準化された確率空間に原点からの方向が一様に分布するベクトルであり、指定する分割数に応じて予め作られる。

３．計算例

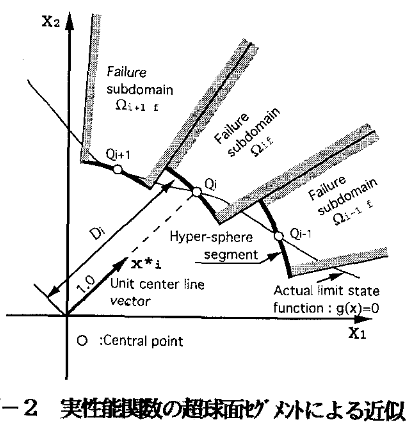
図－３に次の線形性能関数に対して、全空間を１６分割して近似した場合の計算結果を示す。

$$g_x=-x_1-x_2+3\sqrt{2} \tag{4}$$

粗い分割近似にもかかわらず、0.1%誤差の$P_f=1.35136\times10^{-3}$



図－１　放射状分割と超球面セグメント



図－２　実性能関数の超球面セグメントによる近似

表－１　線形性能関数に対する計算結果

Performance Function (1)	Number of Divisions m (2)	Computed Probability of Failure and Associated Error* (3)	Corresponding Reliability Index and Associated Error* (4)
$g^{(1)} = -x_1 - x_2 + 3\sqrt{2}$	16	1.35136×10^{-3} (+0.103%)	3.000 (0.0%)
	32	1.34989×10^{-3} (−0.006%)	3.000 (0.0%)
	64	1.34990×10^{-3} (−0.005%)	3.000 (0.0%)
	128	1.34990×10^{-3} (−0.005%)	3.000 (0.0%)
$g^{(2)} = -x_1 - x_2 - x_3 + 3\sqrt{3}$	320	1.34275×10^{-3} (+0.535%)	3.002 (+0.07%)
	1,292	1.35154×10^{-3} (+0.116%)	3.000 (0.0%)
	5,182	1.35032×10^{-3} (+0.026%)	3.000 (0.0%)
	20,800	1.35023×10^{-3} (+0.019%)	3.000 (0.0%)
$g^{(3)} = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 3\sqrt{4}$	2,170	1.35269×10^{-3} (+0.201%)	2.999 (−0.03%)
	18,992	1.35416×10^{-3} (+0.301%)	2.994 (−0.20%)
	159,294	1.35455×10^{-3} (+0.339%)	2.993 (−0.23%)
	1,303,124	1.35180×10^{-3} (+0.136%)	2.999 (−0.03%)
$g^{(4)} = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 3\sqrt{5}$	604	1.26767×10^{-3} (−6.096%)	3.019 (+0.63%)
	8,782	1.34930×10^{-3} (−0.050%)	3.000 (0.0%)
	229,794	1.36102×10^{-3} (+0.819%)	2.998 (−0.07%)
	4,087,374	1.35981×10^{-3} (+0.729%)	2.998 (−0.07%)

* The errors shown in paranthesis are with respect to the exact values of the probability of failure $P_f = 1.34997 \times 10^{-3}$ and reliability index $\beta = 3.000$

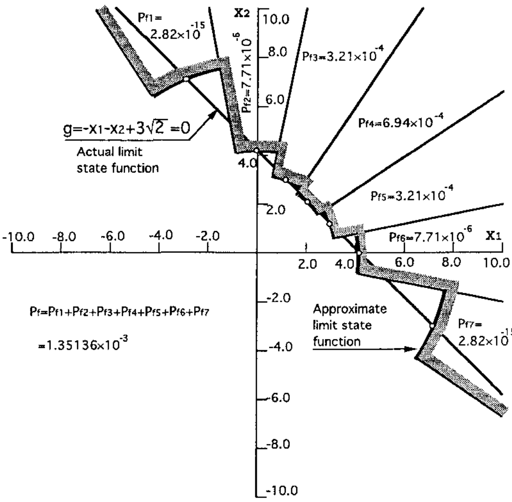
が得られている。表－１には５次元までの線形性能関数に対する計算結果を示す。確率変数の数の増加に伴い精度の低下傾向が見られるが、分割数に対する解の精度は、モンテカルロ法のｻﾝﾌﾟﾙｻｲｽﾞをこの分割数と同数とした場合に得られる解の精度よりも十分に高い。図－４および表－２に、非線形性能関数：

$$g_x = -0.5(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) - (x_1 + x_2)/\sqrt{2} + 3.0 \qquad (5)$$

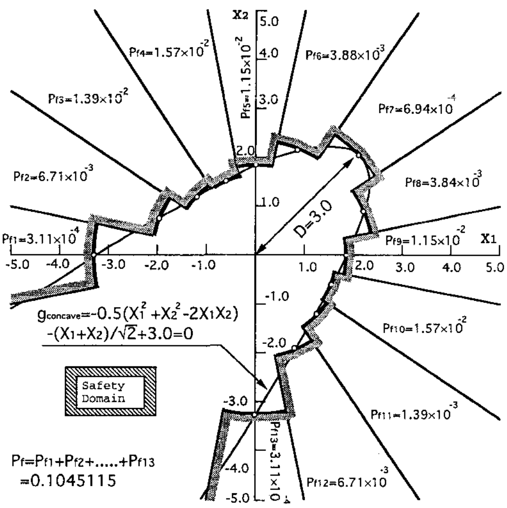
を用いた場合の計算結果を示す。提案する手法は、ﾓﾝﾃｶﾙﾛ法と比べて妥当な解析値を与えるのに対してＦＯＲＭは、極端に異なった破壊確率を与えている。これは、この性能関数が２つの設計点を有することによるものである。

参考文献

1) Ang, A. H-S., Tang, W. H.:Probability concept in engineering planning and design, Vol II, John Wiley and Sons, 1984.
2) Hasofer, A: Reliability index and failure probability, Journal of Struct. Mech., 3(1), pp.25-27, 1974.



図－３　線形性能関数に対する近似



図－４　非線形性能関数に対する近似

表－２　非線形性能関数に対する計算結果

(a) Proposed Radial Division Method

Performance Function (1)	Number of Divisions m (2)	Computed Probability of Failure (3)	Corresponding Reliability Index (4)
$g_{concave} = -0.5(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) - (x_1 + x_2)/\sqrt{2} + 3.0$	16	1.04512×10^{-1}	1.256
	32	1.04556×10^{-1}	1.256
	64	1.04557×10^{-1}	1.256
	128	1.04555×10^{-1}	1.256
	256	1.04554×10^{-1}	1.256
	512	1.04554×10^{-1}	1.256

(b) Reference Values

PROBAN	FORM	1.350×10^{-3}	3.000
RELTRAN			
Starting Point (0,0)	FORM	1.350×10^{-3}	3.000
Starting Point (−1,1)	FORM	4.862×10^{-2}	1.658
Monte Carlo Simulation Sample Size=1.8×10^6 (Implied Error= 0.44%)		1.0439×10^{-1}	1.257