Ｉ－527　変分原理に基づくトラス構造物の最適設計法の定式化について

愛媛大学工学部　正会員　大久保禎二　宇部興産(株)　正会員　○和多田康男
愛媛大学大学院　学生員　大森　久義　愛媛大学大学院　学生員　田中　賢太
(株)熊谷組　正会員　三好　和也

１．まえがき

本論文は、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づき、構造物の全コンプリメンタリーエネルギーの停留条件、応力制限、変位制限を制約条件として考慮し最適設計問題を定式化する方法について述べるとともに、改良ＬＰの手法を用いてトラス構造物の重量あるいは総コストを最小化する手法について基礎的な検討を行った結果について述べるものである。

２．変分原理に基づくトラスの最適設計問題の定式化

２－１．トラスの原最適設計問題

本研究では、トラスの各部材の応力度σ及び断面積Ａを設計変数とし、各部材の応力度及び可動節点変位に関する制約条件のもとで、トラスの全重量(総コスト)を最小化する最適設計問題を考える。即ち、

$$\begin{aligned}
&\text{find} \quad \sigma,\ A,\ u, \quad \text{which} \quad \text{minimize} \quad W=\sum_{i=1}^{n}\rho_i A_i l_i \\
&\text{subject to} \quad g_{\sigma q}(\sigma,\ A)=\sigma_q-\sigma_{qa}\leqq 0 \qquad (q=1,\ldots,n) \\
&\qquad\qquad\quad\ g_{ur}(\sigma,\ A,\ u)=u_r-u_{ra}\leqq 0 \qquad (r=1,\ldots,m)
\end{aligned} \tag{1}$$

ここに、A_i, l_i, ρ_iはそれぞれ部材ｉの断面積、部材長、単位体積重量(単位コスト)、ｎは部材数、ｍは可動節点変位の数である。また$g_{\sigma q}$、g_{ur}はそれぞれ部材ｑの応力度および可動節点変位成分ｒの変位に関する制約条件である。

２－２．ラグランジュの未定乗数法を用いたトラスの非線形解析法

最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づくトラスの非線形解析法によれば、トラスの各部材の応力度σは、各可動節点における力の釣合条件Ｑのもとで､構造物の全コンプリメンタリーエネルギー$\Pi_c(\sigma)$を最小化するように各部材の応力度σを決定することにより求められる。即ち、

$$\begin{aligned}
&\text{find} \quad \sigma, \quad \text{which} \quad \text{minimize} \quad \Pi_c(\sigma) \\
&\text{subject to} \quad Q_j=P_j-\sum_{i=1}^{n} C_{ji}\sigma_i A_i=0 \qquad (j=1,\ldots,m)
\end{aligned} \tag{2}$$

ここに、C_{ji}は軸力$\sigma_i A_i$の可動節点成分ｊへの方向余弦、P_jは可動節点成分ｊに作用する外力である。次に、式(2)のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数 $L(\sigma,\ \lambda)$ を導入する。

$$L(\sigma,\ \lambda)=\Pi_c(\sigma)-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j Q_j(\sigma) \tag{3}$$

ここに、λ_jはラグランジュ乗数であり、$L(\sigma,\ \lambda)$の極値が満足すべき条件は、次のようになる。

$$\frac{\partial L(\sigma,\ \lambda)}{\partial \sigma_i}=\frac{\partial \Pi_c(\sigma)}{\partial \sigma_i}-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial Q_j(\sigma)}{\partial \sigma_i}=0 \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{4}$$

$$\frac{\partial L(\sigma,\ \lambda)}{\partial \lambda_j}=-Q_j(\sigma)=0 \qquad (j=1,\ldots,m) \tag{5}$$

ところで、式(4)における偏微分係数 $\partial\Pi_c(\sigma)/\partial\sigma_i$, $\partial Q_j(\sigma)/\partial\sigma_i$ の値は、次式により簡単に求められる。

$$\frac{\partial \Pi_c(\sigma)}{\partial \sigma_i}=\varepsilon_i(\sigma_i)\cdot A_i\cdot l_i \tag{6}$$

$$\frac{\partial Q_j(\sigma)}{\partial \sigma_i}=C_{ji}\cdot A_i \tag{7}$$

ここで、$\varepsilon_i(\sigma_i)$は部材ｉのσ_iに対するひずみ量であり、式(4)および(5)は、次のように表わされる。

$$\frac{\partial L(\sigma,\ \lambda)}{\partial \sigma_i}=\varepsilon_i(\sigma_i)\cdot l_i-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot C_{ji}=0 \quad (8) \qquad \frac{\partial L(\sigma,\ \lambda)}{\partial \lambda_j}=\sum_{i=1}^{n}C_{ji}\cdot\sigma_i\cdot A_i-P_j=0 \quad (9)$$

上式(8)および(9)の非線形連立方程式を解くことによりσ_i及びλ_jが求められる。

２－３．最適設計問題の再定式化

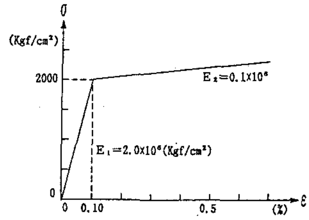
２－２で導入したトラスの解析上満足すべき条件式(8)および(9)を用いることにより、式(1)の最適設計問題を解析上満足すべき条件をも考慮して次のように再定式化することができる。

$$\text{find}\quad \sigma,\ A,\ \lambda\ ,\quad \text{which}\quad \text{minimize}\quad W=\sum_{i=1}^{n}\rho_i A_i l_i \tag{10}$$

$$\text{subject to}\quad g_i(\sigma,\ \lambda)=\varepsilon_i(\sigma_i)l_i-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j C_{ji}=0 \qquad g_j(A,\ \sigma)=\sum_{i=1}^{n}C_{ji}\sigma_i A_i-P_j=0$$

$$g\sigma_q(\sigma,\ A)=\sigma_q-\sigma_a\leqq 0 \qquad g\lambda_r(\sigma,\ A,\ \lambda)=\lambda_r-\lambda_{ra}\leqq 0$$

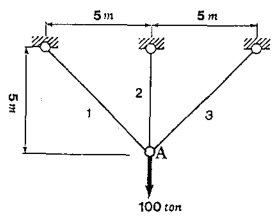
式(10)の最適設計問題を解く方法として種々の数理計画法の適用が考えられるが、本研究では式(10)の最適設計問題が、力の釣合方程式を除き全てσ，A，λの線形な方程式で構成されていることを考慮し、ＳＬＰの手法（逐次線形計画法）を用いて最適解を求めることとした。



図－１　応力度－ひずみ関係

３．最適設計例及び考察

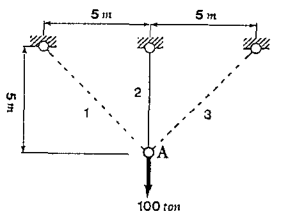
上で述べた方法により、図－1に示す応力度－ひずみ関係を有する材料よりなる図－2の３部材トラスの最適化を行った結果を表－1に示す。目的関数としてトラスの全重量を考え、ρ_i=7.85g/cm^{3}とした。またΔAのmove limitとして初期値の50％以下となる条件を考慮している。



図－２　３部材トラス

σ_a=4000kg/cm^2、u_a=20cm の制約条件のもとでは、応力制限のみが支配的な制約条件となり、不必要な部材１及び３の断面積は改良が進むに従って０に近づき、９回の改良により最適解を得ている。最適解では部材２がfully stressとなり、部材１および３の断面積はＡの下限制約値と等しくなっている。

σ_a=4000kg/cm^2、u_a=5cm の制約条件のもとでは、変位制限が支配的な制約条件となり、最適解は11回の改良により得られた。この場合も部材１および３の断面積がＡの下限制約値と等しくなっている。また、部材２の応力度は2872.1kg/cm^{2}と、σ_aに対し余裕のある断面となっている。



図－３　最適解での形状
点線は不要部材

４．あとがき

本論文で、変分原理に基づくトラス構造物の最適設計法の定式化について基本的な考え方を述べた。この方法では、構造物の非線形解析において満足すべき条件をも等号制約条件として付加し最適化を行っているため、最適化のために必要な構造解析の回数を大幅に減少させることができる。また、本論文の方法はエネルギー原理を直接適用しているため、最適化の過程で必要となる多くの感度係数をきわめて容易に求めることができるとともに、材料の線形性・非線形性に全く関係なく適用することができる。これらのことは本方法の大きな長所である。

表－１　３部材トラスの最適値

		部材１	部材２	部材３	点Aの変位 (cm)	重量 (kg)	* ITE (回)
		断面積 (cm²)					
		応力度 (kg/cm²)					
	初期断面積	20.0	20.0	20.0			
設計条件	σ_a=4000kg/cm²	0.1	24.9	0.1	10.5	98.97	9
	u_a=20cm	2961.7	3997.5	2961.7			
	σ_a=4000kg/cm²	0.1	34.5	0.1	5.0	136.52	11
	u_a=5cm	2396.2	2888.7	2396.2			

＊　最終解を得るために要した繰り返し回数

［参考文献］１)大久保　他，土・学・論，第374号　pp.427～436.　　２)鷲津久一朗　エネルギ原理入門