

愛媛大学工学部 正会員 大久保 禎二

愛媛大学工学部 正会員 ○谷脇 一弘

1. まえがき

斜張橋の地震応答に対する制約条件をも考慮した最適設計を行う場合には、斜張橋のケーブル・主桁・塔などの部材剛性やケーブルの主桁・塔への定着位置などの設計パラメータの変化に対する動的挙動のsensitivities(感度係数)を効率的に求めることが必要となる。本研究では、応答スペクトル法を用いた斜張橋の動的解析法において、振動数方程式を設計変数で直接偏微分することより得られる固有値・固有ベクトルのsensitivitiesを用いて、動的挙動のsensitivitiesを解析的に求める方法について考察するとともに、三径間連続斜張橋に適用し、差分法による感度解析の結果と比較することにより、本研究の方法の有効性について検討を行ったものである。

2. 斜張橋の固有値・固有ベクトルの感度係数の計算

(1) 固有値・固有ベクトルの計算

外力及び減衰力が作用しない場合の多自由度線形振動系の運動方程式を振幅ベクトル(固有ベクトル) ϕ 、振動数 ω 、剛性マトリックス K および集中質量マトリックス M を用いて表現すると次式となる。

$$K\phi = \lambda M\phi \quad \text{ここに、} \lambda = \omega^2 \quad (1)$$

上式において、 ϕ を M の対角項が非零の固有ベクトル ϕ_1 (質量マトリックス M')および零の固有ベクトル ϕ_2 に分類して表現すると次式となる。

$$\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} M' & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{vmatrix}, \quad \phi_2 = -K_{22}^{-1} K_{21} \phi_1 \quad (2)$$

上式を式(1)に代入することにより、 M' 、 ϕ_1 に関する次式が得られる。

$$K' \cdot \phi_1 - \lambda M' \phi_1 = 0 \quad \text{ここに、} K' = K_{11} - K_{12} \cdot K_{22}^{-1} \cdot K_{21} \quad (3)$$

上式は標準的な固有値問題であり、この解法として本研究では必要な固有値の次元のみに着目し、小さな次元で能率的に固有値および固有ベクトルを計算することができるサブスペース法を用いた。

(2) 固有値の感度係数の計算

設計変数 x_i に対する j 次の固有値の感度係数 $d\lambda_j/dx_i$ の計算は、式(3)を設計変数 x_i で偏微分することにより、次式により計算することができる。

$$\frac{d\lambda_j}{dx_i} = \frac{\phi_{1j}^T \left(\frac{dK'}{dx_i} - \lambda_j \frac{dM'}{dx_i} \right) \phi_{1j}}{\phi_{1j}^T M' \phi_{1j}} \quad (4)$$

(3) 固有ベクトルの感度係数の計算

設計変数 x_i に対する j 次の固有ベクトルの感度係数 $d\phi_{1j}/dx_i$ の計算では、固有ベクトル ϕ_{1j} の各要素を最大の要素 $\phi_{1j}^{k_{\max}}$ で除し、最大値が1となるように正規化された固有ベクトルを $\bar{\phi}_{1j}$ とし、 K 、 M ($n \times n$)の k 行要素および k 列要素、 $\bar{\phi}_{1j}$ の k 要素を取除き縮約した行列をそれぞれ K' 、 M' ($(n-1) \times (n-1)$)、 $\bar{\phi}'_{1j}$ とすれば、 $d\bar{\phi}_{1j}/dx_i$ は次式より計算することができる。

$$\frac{d\bar{\phi}'_{1j}}{dx_i} = (K' - \lambda_j M')^{-1} \left\{ - \left(\frac{dK'}{dx_i} - \lambda_j \frac{dM'}{dx_i} \right) \bar{\phi}'_{1j} + \frac{d\lambda_j}{dx_i} M' \bar{\phi}'_{1j} \right\}, \quad \frac{d\bar{\phi}_{1j}^{k_{\max}}}{dx_i} = 0 \quad (5)$$

$\phi_{1j}^T M' \phi_{1j} = 1$ の条件を満たす $d\phi_{1j}/dx_i$ の計算は、 $\bar{\phi}_{1j} = \phi_{1j} / \phi_{1j}^{k_{\max}}$ の関係式より、次式より計算することができる。

$$\frac{d\phi_{1j}}{dx_i} = \frac{d\phi_{1j}^{k_{\max}}}{dx_i} \bar{\phi}_{1j} + \phi_{1j}^{k_{\max}} \frac{d\bar{\phi}_{1j}}{dx_i} \quad (6)$$

ここに、 $\frac{d\phi_{1j}^{k_{\max}}}{dx_i} = -(\phi_{1j}^{k_{\max}})^2 \phi_{1j}^T M' \frac{d\bar{\phi}_{1j}}{dx_i} - \frac{\phi_{1j}^{k_{\max}}}{2} \phi_{1j}^T \frac{dM'}{dx_i} \phi_{1j}$ (7)

$d\phi_{2j}/dx_i$ は、式（2）の ϕ_2 と ϕ_1 の関係を x_i で偏微分することにより得られる。

$$\frac{d\phi_{2j}}{dx_i} = -k_{22}^{-1} \left(\frac{dk_{21}}{dx_i} \phi_{1j} + k_{21} \frac{d\phi_{1j}}{dx_i} + \frac{dk_{22}}{dx_i} \phi_{2j} \right) \quad (8)$$

3. 応答変位および部材力の感度係数の計算

j 次のモードに関する応答変位 u_j の感度係数 du_j/dx_i は、応答変位とモーダル座標系に対する変位 q_j との関係式 $u_j = \phi_j q_j$ を x_i で偏微分することにより、次式により計算することができる。

$$\frac{du_j}{dx_i} = \frac{d\phi_j}{dx_i} q_j + \phi_j \frac{dq_j}{dx_i} \quad (9)$$

上式における dq_j/dx_i は刺激係数 β_j 、加速度応答スペクトル S_A を用いて次式により計算することができる。

$$\frac{dq_j}{dx_i} = \frac{1}{S_{Aj}} \cdot \frac{d\beta_j}{dx_i} + \frac{\beta_j}{\lambda_j} \cdot \frac{dS_A}{dx_i} - \frac{\beta_j S_A}{\lambda_j} \cdot \frac{d\lambda_j}{dx_i} \quad (10)$$

$$\text{ここに、} \frac{d\beta_j}{dx_i} = \left(\frac{d\phi_j}{dx_i} \right)^T M\{1\} + \phi_j^T \frac{dM}{dx_i} \{1\}, \{1\}: \text{要素を1とする} n \text{ 行1列の行列} \quad (11)$$

j 次のモードに関する部材要素 k の部材力 f_{kj} の感度係数 df_{kj}/dx_i は次式により計算することができる。

$$\frac{df_{kj}}{dx_i} = \frac{dk_k}{dx_i} C^T u_j + k_k \frac{dC^T}{dx_i} u_j + k_k C \frac{du_j}{dx_i} \quad (12)$$

ここに、 k_k は部材要素 k の剛性マトリックス、 C は座標変換マトリックス

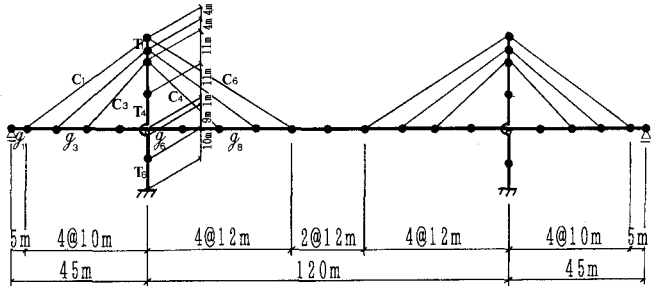
最大応答変位および部材力の感度係数は、各モードの応答値の2乗和平方根の計算式を設計変数 x_i で偏微分することにより容易に計算することができる。

4. 計算例および考察

感度解析の計算例として、図－1に示す中央径間120mの3径間連続鋼斜張橋の振動解析モデルに、本研究で述べた地震応答感度解析法を適用し、差分法により得られた感度係数との比較を行った。集中質点位置は解析上の節点位置とし、質量は主桁・塔・ケーブルの重量を重力加速度で除し、解析上の節点で区切られた部材長内の分布質量を部材の両端の質点に分配した。応答スペクトルとして、道路橋示方書に規定されているI種地盤のスペクトルを用いた。

ケーブル $C_1 \sim C_6$ の断面積 $A_{C1} \sim A_{C6}$ の変化による側径間最上段ケーブル C_1 の最大軸力の応答値 N_{C1} の感度係数の比較を表－1に示す。なお、差分法による感度係数の計算においては、ケーブル断面積の変化量を1%と仮定した。

2つの手法による感度係数の解の差は最大1.7%であり、ほぼ完全に一致していると言える。また、感度係数の小さな部材における比較においても、2つの手法による解は最大5%以内の差であり極めてよく一致している。また、この計算例における計算効率については、本研究で述べた方法が差分法による方法の1/5程度の計算量となり、本研究で述べた方法により極めて能率的かつ正確に地震応答感度解析が行えることが明らかとなった。



図－1 3径間連続鋼斜張橋モデル

表－1 差分法と解析的手法による dN_{C1}/dA_i の計算

ケーブル N.O.	① $N_{C1}(A^0)$	② $N_{C1}(A^0 + \Delta A)$	③ $\frac{②-①}{\Delta A}$	④ $\frac{dN_{C1}}{dA}$	⑤ $\frac{④}{③}$
C_1	48.8082	48.9463	690.500	694.314	1.006
C_2	48.8082	48.8116	17.000	16.873	0.993
C_3	48.8082	48.8132	25.000	24.293	0.991
C_4	48.8082	48.8116	17.000	17.293	1.017
C_5	48.8082	48.8048	-17.000	-17.197	1.012
C_6	48.8082	48.8237	77.500	77.800	1.004

① A^0 による N_{C1} の応答値

② $A^0 + \Delta A$ による N_{C1} の応答値

③差分法による解

④解析的手法による解