# I－524　ガウスニュートン法を用いた最適フィードバック制御

東京電機大学　理工学部　学正員　大久保昌知
国士舘大学　工学部　正　員　菊田　征勇
東京電機大学　理工学部　正　員　松井　邦人

## １．はじめに

近年構造物の最適振動制御、更に構造最適設計と最適振動制御のカップリング問題に関する研究が活発に行われている。これらの問題を解くには動的解析と最適化のアルゴリズムが必要となる。本研究はまず前者のアクティブなフィードバック制御に焦点を合わせたものである。ここでは、最適なフィードバック制御を対象として、そのゲインマトリックスの決め方を検討する。ゲインマトリックスを決めるのにしばしば準ニュートン法を用いているが、その方法では１次元探索が問題になる。そこで、これに変わる方法としてガウスニュートン法を用い、その有効性について検討する。

## ２．最適フィードバック制御

外力と制御力が作用するとき、構造物の運動方程式は式（１）で表される。

$$M\ddot{z}+C\dot{z}+Kz=f_e+Rf_c \tag{1}$$

ここに、M、C およびK は、それぞれn×nの質量、減衰および剛性マトリックスであり、$\ddot{z}$、$\dot{z}$ および$z$ はn×1の加速度、速度および変位ベクトルである。また、$f_e$ および$f_c$ は、n×1の外力および制御力ベクトルで、R はn×mの制御力作用点を示すマトリックスである。フィードバック制御ルールより、制御力ベクトルは次式で表される。

$$f_c=-G_1\dot{z}-G_2z \tag{2}$$

ここに、$G_1$、$G_2$ は、m×nのゲインマトリックスである。式（２）を式（１）に代入し、整理すると

$$M\ddot{z}+(C+RG_1)\dot{z}+(K+RG_2)z=f_e \tag{3}$$

となる。制御の評価関数Ｊを式（４）で表す。

$$J=\frac{1}{2}\int_0^T\left\{z^TW_1z+f_c^TW_2f_c\right\}dt \tag{4}$$

ここに、$W_1$、$W_2$ は、それぞれn×n、m×mのウェイトマトリックスであり、Tは制御の最終時間である。最適制御を達成するには、Ｊが最小となるように、$G_1$、$G_2$ の要素を決定すれば良い。

## ３．ガウスニュートン法の適用

$\dot{z}$および$z$ は$G_1$、$G_2$ の関数であり、$\dot{z}$、$z$ および$G_1$、$G_2$ を、ゲインマトリックスの要素$x_j$を変数としてテーラー展開し、評価関数Ｊをそれらの１次近似で表すと、Ｊは$\delta x_j$ に関する４次式になる。従ってこの式を最小化するためにしばしば準ニュートン法が用いられるが、この方法では１次元探索が必要となり、時間領域で１次元探索を行うことは計算効率上好ましくない。そこでガウスニュートン法を適用する。ゲインマトリックスの１次近似の第２項を無視すると、Ｊの近似式が最小となるための必要条件より、式（５）を得る。ここに、Mはゲインマトリックスの要素の総数である。この式は$\delta x_j$ に関する連立１次方程式となり、容易に解くことができる。

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{M}\int_0^T\Bigg\{&\left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)^T W_1\frac{\partial z}{\partial x_j}+\left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial x_k}\right)^T G_1^TW_2G_1\frac{\partial \dot{z}}{\partial x_j}\\&+\left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial x_k}\right)^T G_1^TW_2G_2\frac{\partial z}{\partial x_j}+\left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)^T G_2^TW_2G_1\frac{\partial \dot{z}}{\partial x_j}\\&+\left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)^T G_2^TW_2G_2\frac{\partial z}{\partial x_j}\Bigg\}dt\,\delta x_j\\=-\int_0^T\Bigg\{&\left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)^T W_1z+\left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial x_k}\right)^T G_1^TW_2G_1\dot{z}\\&+\left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial x_k}\right)^T G_1^TW_2G_2z+\left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)^T G_2^TW_2G_1\dot{z}\\&+\left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)^T G_2^TW_2G_2z\Bigg\}dt\qquad (k=1,\cdots,M)\end{aligned} \tag{5}$$

計算手順の概略を示すと次のようになる。

step１　$W_1$ 、$W_2$ を与える。$G_1$ 、$G_2$ の初期値を仮定する。
step２　式（３）を解き、$z$ 、$\dot{z}$ を求める。
step３　式（４）を計算し、Ｊ の値を求める。
step４　式（３）から、ゲインマトリックスの要素$x_j$に関する感度方程式を解く。

**step 5**　式（５）の連立１次方程式を作り $\delta x_j$ （$j=1,\cdots,M$）について解く。

**step 6**　$|\delta J|=\left|\sum_{j=1}^{M}\frac{\partial J}{\partial x_j}\delta x_j\right|$ が十分に小さく、かつ $\|\delta x\|$ も十分に小さくなれば計算を打ち切る。そうでないときは $x_j+\delta x_j\rightarrow x_j$ として **step 2** に戻る。

４．例題

前節に記したアルゴリズムを検証するため、図１のような２質点モデルをフィードバック制御する。外力として基盤にエルセントロ波を作用させ、質点２に制御力を作用させる。ゲインマトリックスの初期値を G1(1)＝G1(2)＝100.0tf・s/m, G2(1)＝G2(2)＝10.0tf/m と仮定して繰り返し計算を行った。収束値はG1(1)＝G1(2)＝$2.947\times10^{10}$ tf・s/m, G2(1)＝$5.246\times10^{8}$ tf/m, G2(2)＝$2.952\times10^{9}$ tf/m である。ゲインマトリックスの収束過程を図２に示す。また最大変位の経過を図３に、最大制御力の経過を図４に示した。なお非制御時の最大変位は3.20cm である。ゲインマトリックスが収束するにしたがい、最大変位、最大制御力も一定値に近づいていることが明かである。

５．おわりに

最適フィードバック制御の方法として、ガウスニュートン法に基づくアルゴリズムを誘導した。例題を用いてその有効性について検証した。１次元探索を行う必要がないのがこの方法の長所である。

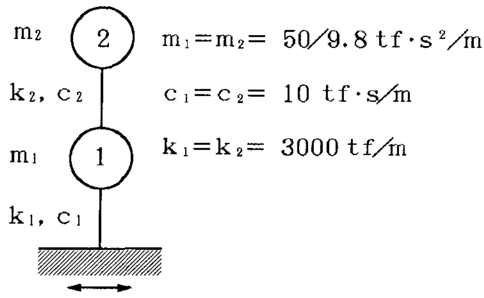


図１　２質点系モデル

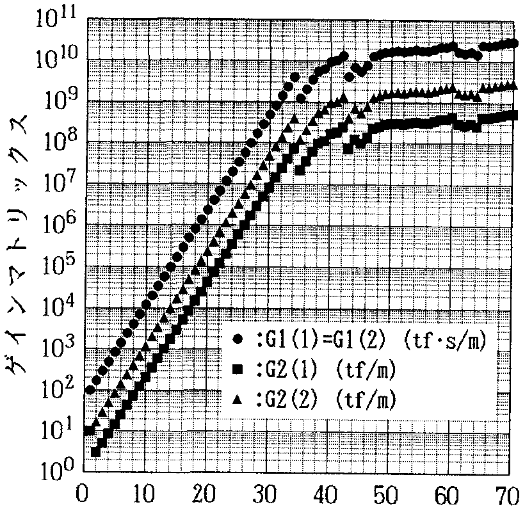


図２　ゲインマトリックス

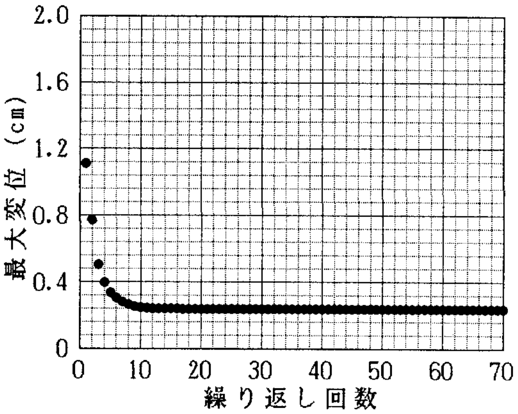


図３　変位

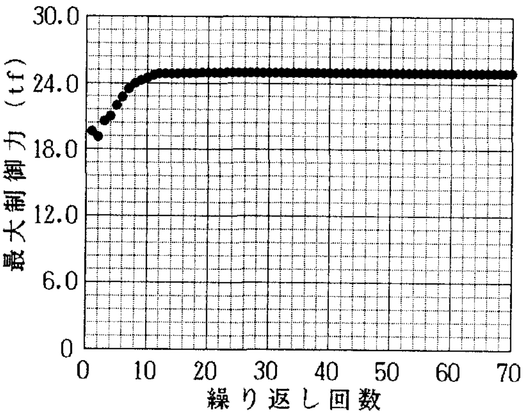


図４　制御力