Ｉ－518　トラス構造物の最小重量設計と最大剛性設計

東洋大学　学生員○内海　芳則　東洋大学　正会員　新延　泰生
（株）大東設計ｺﾝｻﾙﾀﾝﾄ　正会員　榎本　覚雄　東洋大学　学生員　小室　和之

１．はじめに

単一荷重条件下での静定トラス構造において、全応力設計が最小重量設計となることは、かなり以前から明らかにされている。また曲げを受ける梁や板構造などで最大剛性設計の解が全応力設計となることは証明されている[4]。これらから不静定トラス構造について最小重量設計が最大剛性設計になることが予想される。

トラス構造の最適設計において、断面の設計変数は通常連続変数と仮定している。また部材は一様断面と仮定し、それぞれの断面を単一の設計変数で表している。一般に設計変数として断面積あるいはその逆数が用いられる。通常、設計変数を断面積とした場合、応力制約条件式や変位制約条件式は非線形な形で表現されるが、感度係数特性によりこれらを線形式に置換することが可能である。本研究では線形計画法（ＬＰ）を用いた断面最適化を行い最小重量設計、最大剛性設計より得られた解を比較した。

２．感度係数特性を用いた最適化問題の定式化

k番目の設計点での感度係数によるk+1番目の任意の変位z^{k+1}の推定式は、

$$z^k+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial z}{\partial X_i}\right]^k \delta X_i = z^{k+1} \qquad (1)$$

$\delta X_i = X_i^{k+1}-X_i^k$ と表せるので

$$z^k+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial z}{\partial X_i}\right]^k \left(X_i^{k+1}-X_i^k\right)$$

$$= z^k+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial z}{\partial X_i}\right]^k X_i^{k+1}-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial z}{\partial X_i}\right]^k X_i^k \qquad (2)$$

ここで感度係数特性[1]は

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial z}{\partial X_i}\right]^k X_i^k = z^k$$

であるから式（１）は

$$2z^k+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial z}{\partial X_i}\right]^k X_i^{k+1} = z^{k+1} \qquad (3)$$

となる。また応力の感度係数特性によるk+1番目の任意の応力の推定値は次のように表せる。

$$2\sigma^k+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial X_i}\right]^k X_i^{k+1} = \sigma^{k+1} \qquad (4)$$

（１）最小重量設計

トラス構造の重量をWとし、これを各部材が許容応力を満足する、または変位制約を満足するといった条件のもとで最小化するように断面積Aiを求める最小重量設計において式（４），（３）より次のように定式化する。

$$W=\sum_{i=1}^{n} l_i \rho X_i \quad \rightarrow \quad \min$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial \sigma_j}{\partial X_i}\right]^k X_i \le \sigma_a - 2\sigma_j^k \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial z_j}{\partial X_i}\right]^k X_i \le z_a - 2z_j^k \qquad (j=1,2,\cdots,m)$$

（２）最大剛性設計

一方、与えられた体積、重量のもとで、それらの剛性を最大にするという最大剛性設計問題は、荷重点での荷重方向変位を最小化する問題として次のように定式化できるが全ひずみエネルギーを最小化することでも定式化可能であり、分布荷重を受ける構造物など目的関数として変位を明確に規定できない構造に対してこの定式化の方法が採用される。

トラス構造の全ひずみエネルギーUは、感度係数特性により次のように定式化する。

$$U=\sum_{j=1}^{n}\frac{N_j^{k2} l_j}{2EA_j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{N_j^k l_j}{2E}\sigma_j=\sum_{j=1}^{n}\frac{N_j^k l_i}{2E}\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial \sigma_j}{\partial X_i}\right]^k X_i\right\} \quad \rightarrow \quad \min$$

subject to

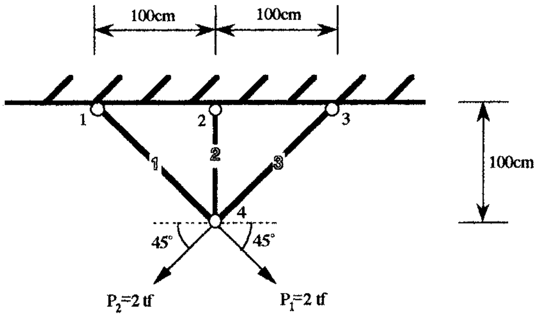
$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial \sigma_j}{\partial X_i}\right]^k X_i \le \sigma_a - 2\sigma_j^k \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

$$W=\sum_{i=1}^{n} l_i \rho X_i$$

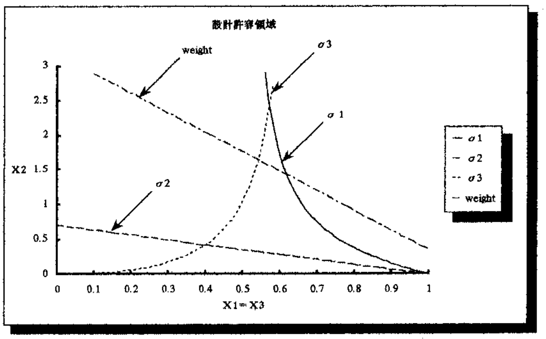
以上の定式化によりLPで断面積を求め、その断面積での感度係数を求め、再びLPを行うといった繰り返し計算を解が収束するまで行う。また収束途中に最適解が存在することがあるので、この場合は目的関数の変化によって最適解を決定する。

3. 数値計算例

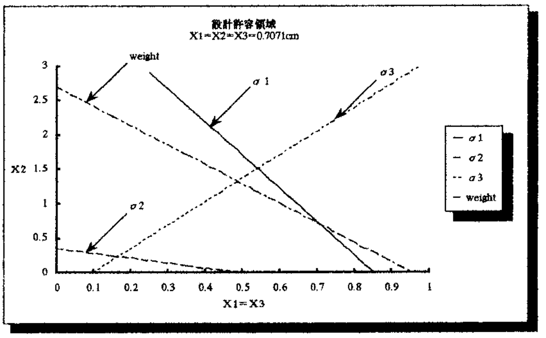
図－１に示す２個の荷重条件を受ける簡単な３部材トラスで前述の定式化によって数値計算を行った。荷重状態、および幾何形状が左右対称であることより、設計変数は$X_1=X_3$とし１つの荷重状態のみを考えれば



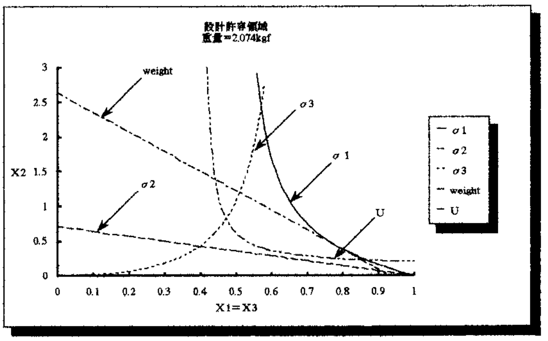
図－１



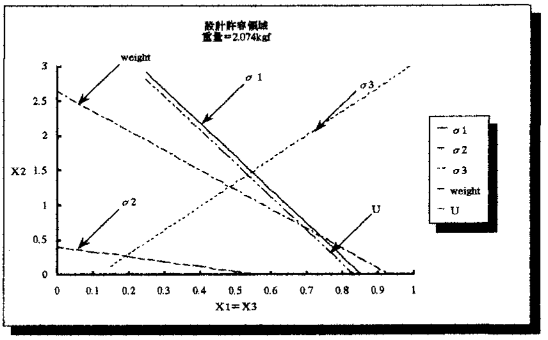
図－２



図－３



図－４



図－５

よい。設計に用いる定数は次のものを与える。

$E=3.0\times10^6(kgf/cm^2)$　$\rho=0.00786(kgf/cm^3)$

$\sigma_L=-1500(kgf/cm^2)$　$\sigma_U=2000(kgf/cm^2)$

図－２、３および図－４，５は、ある設計点における実際の設計空間と線形化した設計空間である。最小重量設計において応力制約によって決まった重量および各部材の断面積は、

$W=2.074(kgf)$

$X_1=X_3=0.788(cm^2)$, $X_2=0.410(cm^2)$

となった。また最小重量設計の解との比較をするために最小重量設計で得られた重量を等号制約条件として最大剛性設計を行った。

$W=2.074(kgf)$　のとき

$X_1=X_3=0.788(cm^2)$、$X_2=0.410(cm^2)$

という解が得られた。これらを比較すると応力制約によって決まった最小重量設計の解が最大剛性設計の解と一致していることがわかる。

4. おわりに

一般に挙動制約条件は設計変数の非線形関数であるが感度係数特性を用いて線形関数に近似し数理計画法の基本的な解法である線形計画法を使って不静定トラス構造の最適設計を行った。さらにこの方法で最小重量設計、最大剛性設計を行いそれぞれの解を比較した。その結果応力制約によるって決まる最小重量および断面積は最大剛性設計によって得られたものと一致した。今後、計算効率の向上、多くの部材を有するモデル、他の構造系式への適用などの課題が挙げられる。

（参考文献）

1）新延泰生、松井邦人、菊地征勇：骨組構造物の応答感度係数の特性、土木学会論文集、1992.7

2）Uri Kirsch、山田ほか監修：最適構造物設計、1983.10、丸善

3 高岡宣善：不静定構造力学 増補版、1989.6、共立出版

4）Huang,N.C.,Int.J、Solids Structure.,1968