I－517　トラス構造物の固有値・固有ベクトルの感度係数特性

東洋大学　学生員○和田　宏之　（株）大東設計ｺﾝｻﾙﾀﾝﾄ　正　員　榎本　覚雄
東洋大学　正　員　新延　泰生　東京電機大学　正　員　松井　邦人
国士舘大学　正　員　菊田　征勇

１.はじめに

本研究では、トラス構造物の固有値・固有ベクトルの感度解析について再度検討を行い、感度係数の各次数の間に存在する特別な関係（感度係数特性）を誘導した。更にこの感度係数特性を用いて感度解析の近似解法を示し、固有値問題に対する感度変数の選択による精度の関係を示している。

２.固有値問題の感度解析

多自由度系の固有値問題は、マトリックス表示を用いて次のように表す事ができる。

$$K(X)y_r = \lambda_r M(X)y_r \tag{1}$$

K(X)　：n×nの剛性マトリックス　　n　：自由度数
M(X)　：n×nの質量マトリックス　　m　：部材数
y_r　：r番目の固有ベクトル（n×1ベクトル）
λ_r　：r番目の固有値
X　：感度変数（m×1ベクトル）

なお、固有ベクトルy_rは、次に示す直交条件式を満足するものとする。

$$y_r^T M(X)y_p = 0\ (p \neq r)\quad , \quad y_r^T M(X)y_p = 1\ (p = r) \tag{2}$$

固有円振動数式$\omega_r = \lambda_r^{1/2}$の感度変数$X_i$に対する１次の感度係数は、式（１）を$X_i$で偏微分し、式（２）の直交条件式を用いて求められる。また、２次以上の感度係数$\partial^2\omega_r / \partial X_i \partial X_j$，$\partial^3\omega_r / \partial X_i \partial X_j \partial X_k$・・・は、更に感度変数$X_j$，$X_k$・・・で偏微分することにより求められる。

一方、固有ベクトルy_rのl番目の成分y_{rl}の感度係数は、固有ベクトルを用いて展開し、式（１），（２）を感度変数でそれぞれ偏微分する事により得られる。

３.感度係数特性

２.より得られた感度係数より無次元化感度係数の骨組全体に対する総和、すなわち$\sum_{i=1}^{m}(\partial\omega_r / \partial X_i)\ X_i / \omega_r$，$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\partial^2\omega_r / \partial X_i \partial X_j)\ X_i X_j / \omega_r$，$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(\partial^3\omega_r / \partial X_i \partial X_j \partial X_k)\ X_i X_j X_k / \omega_r$，$\sum_{i=1}^{m}(\partial y_{rl} / \partial X_i)\ X_i / y_{rl}$，$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\partial^2 y_{rl} / \partial X_i \partial X_j)\ X_i X_j / y_{rl}$，$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(\partial^3 y_{rl} / \partial X_i \partial X_j \partial X_k)\ X_i X_j X_k / y_{rl}$等を計算すると定数となり、それらの値は感度変数として、A，$R_A = 1/A$及び$A^{1/2}$，$A^{-1/2}$とした場合表－１のように整理される。

表－１　無次元化感度係数の骨組全体に対する総和（固有値問題）

感度次数	固有円振動数 ω_r 感度変数 X_i			固有ベクトル y_r 感度変数 X_i		
	$A^{1/2}$	A	R_A	$A^{-1/2}$	A	R_A
1	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
p	0	0	0	1	$\frac{(-1)^p}{2^p}$	$\frac{1}{2^p}$

４.感度解析の近似解法

（１）感度係数特性に基づく固有値問題の感度解析法

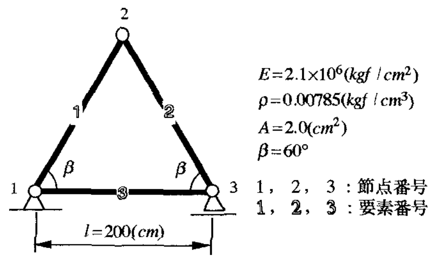
３.で述べた感度係数の特性を利用して、固有円振動数と固有ベクトルの感度係数の新しい求め方の提案を行う。表－１より以下の式が成立する。

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\omega_r}{\partial X_i}\frac{X_i}{\omega_r} = \sum_{i=1}^{m}\omega_{r,i}\frac{X_i}{\omega_r} = 0 \quad , X_i = A_i^{1/2} \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial y_{rl}}{\partial X_i}\frac{X_i}{y_{rl}} = \sum_{i=1}^{m}y_{r,i}\frac{X_i}{\omega_r} = 1 \quad , X_i = A_i^{-1/2} \tag{4}$$

m組の感度変数の値$X_{i(1)}$，$X_{i(2)}$，・・$X_{i(m)}$（i=1,2,・・m）に対してm組の固有円振動数$\omega_{r(1)}$，$\omega_{r(2)}$，・・・$\omega_{r(m)}$（i=1,2,・・・m）や固有ベクトル$y_{rl(1)}$，$y_{rl(2)}$，・・・$y_{rl(m)}$（i=1,2,・・・m）を計算し$\omega_{r,i}$，$y_{rl,i}$などの感度係数が感度変数X_iと独立である（すなわち、X_iの変動量が微少ならば感度係数$\omega_{r,i}$，$y_{rl,i}$は一定である）と仮定すれば、式（３），（４）より固有値問題における感度係数$\omega_{r,i}$及び$y_{rl,i}$を決定する連立１次方程式が得られる。

（２）数値計算例



図－１　解析モデル（３要素トラス）

図-１に示すのトラス構造物の各部材をそれぞれ±10％，±５％，±１％，±0.５％，±0.１％，±0.0１％変動させて固有値解析を行い、１２通りの連立方程式が得られ、その方程式をそれぞれ解くことにより感度係数が求まる。

例：１次固有円振動数の感度係数

（感度変数$A^{1/2}$，断面積変動量＋１０％の時）

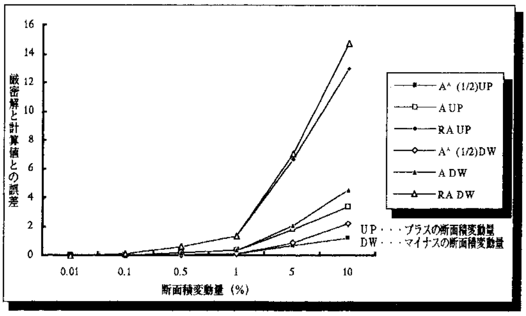
$$\begin{bmatrix} 2.2^{1/2} & 2^{1/2} & 2^{1/2} \\ 2^{1/2} & 2.2^{1/2} & 2^{1/2} \\ 2^{1/2} & 2^{1/2} & 2.2^{1/2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \omega_{r,1} \\ \omega_{r,2} \\ \omega_{r,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11.3383 \\ -22.6114 \\ 28.7817 \end{Bmatrix} \tag{5}$$

厳密解　$\omega_{1,1} = -140.2779, \omega_{1,2} = -299.5349, \omega_{1,3} = 439.81288$

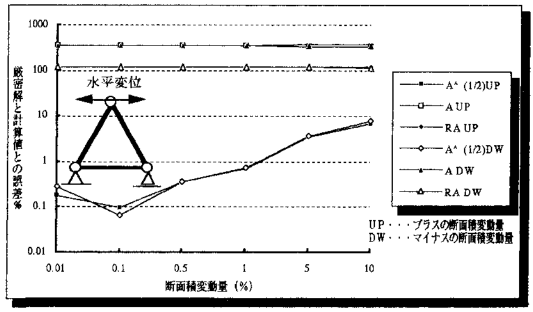
計算値　$\omega_{1,1} = -139.7039, \omega_{1,2} = -303.0197, \omega_{1,3} = 441.52513$

誤差　(−0.409178%)　(1.1634146%)　(0.3893133％)

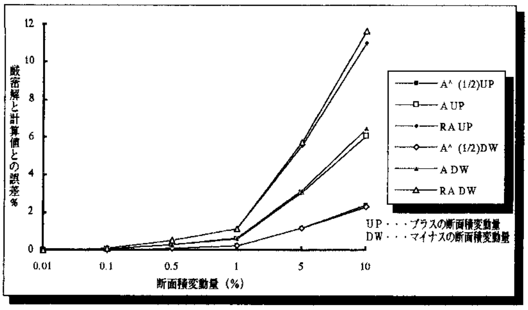
解析の結果から１次，２次，３次の固有円振動数・固有ベクトルの感度係数が、特性値を用いた近似解法により得られることがわかった。



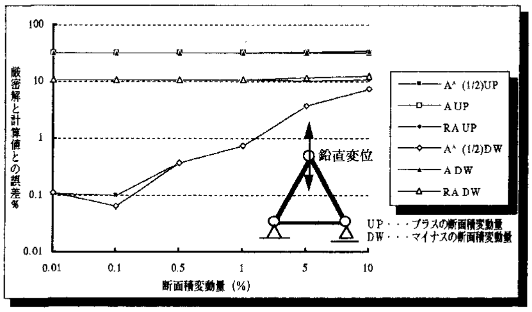
図－２　１次固有円振動数



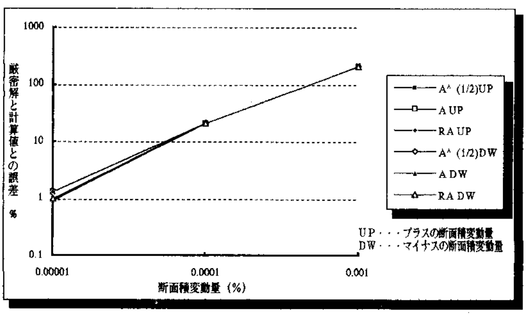
図－６　２次固有ベクトル（節点２の水平変位）



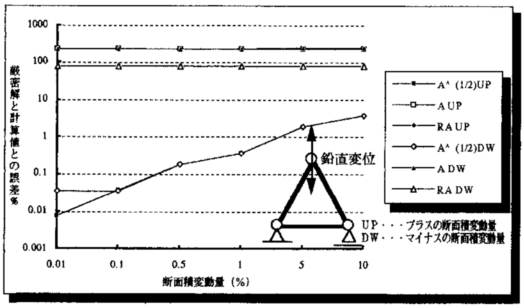
図－３　２次固有円振動数



図－７　３次固有ベクトル（節点２の鉛直変位）



図－４　３次固有円振動数



図－５　１次固有ベクトル（節点２の鉛直変位）

近似解法により得られた感度係数の厳密解に対する誤差を感度変数毎に整理して図２～７に示す。感度係数は、各部材毎に計算されるため、部材１～３に対する感度係数の誤差を二乗和平均により表現している。

固有円振動数の場合、図2~4に示すように、１次，２次については変動量１０％において変数毎に精度の差があるが、０．１％程度の変動量であれば各変数とも良好な精度で感度係数が得られる。一方、３次については変動量をかなり小さくとっても１次，２次ほどには精度が良くならない。固有ベクトルに対しては、図５～７に示すように各次，各変位方向とも感度変数として$A^{-1/2}$を考えた場合の精度は、０．１％程度の変動量において良好となるが、その他の感度変数を考えた場合、本手法により感度係数を近似的に求める事はできない。

以上のことより、精度の良好な感度変数は、表－１に示した総和の定数値が０あるいは１となることに対応していることがわかる。

５．おわりに

本研究では、トラス構造物の固有値問題を例にとり、骨組全体について総和した値が定数となる特性を導き、この特性を用いた感度解析の近似解法により感度係数を求める場合の感度変数の選択について情報が得られた。

参考文献

１）新延泰生,松井邦人,菊田征勇：骨組構造物の応答感度係数の特性
２）榎本覚雄,新延泰生,松井邦人,菊田征勇,矢島基臣：骨組構造物の固有値・固有ベクトルの感度係数特性,構造工学論文集vol38A