I－516　骨組構造物の座屈荷重最大とする最適設計法に対する一手法

岐阜大学工学部　正会員　中川建治
瀧上工業（株）○正会員　高木録郎
岐阜大学工学部　学生員　前田昌克

1　まえがき

骨組構造物を一定拘束条件のもとで最適な断面を求める設計法として，座屈に対して構造物が安定な断面を持つ設計法を提案する。この設計手法は構造物の主構造材料が一定となる条件のもとで構造物の全体座屈荷重が近似的に最大となるような最適断面設計法である。与えられた荷重に対して構造物に生じ得るすべての座屈モードを考慮するものであり、構造物の安定性を検討する解析手段となるものと考えられる。

2　解析手法の概要

構造物がつり合い状態にあるとき、形状の変化により構造物の安定が崩れる分岐状態を求めることで安定、不安定を論議できる。つり合い状態の分岐となる座屈荷重をP_{CR}、変位をｕとすると棒構造物に対する一般的な座屈基本式は

$$EI\ddot{u}+P_{CR}u=0$$　である。

この関係を平面骨組構造物に拡張して行列表示すると

$$Su+\xi Hu=0$$

ここでＳは剛性行列であり、部材の剛性を表す行列Ｄと部材の幾何学的構成行列Ｃから成る３つの行列の積（$=C^TDC$）で表される。Ｈは座屈を生じる場合の部材の幾何学的変化量を表す行列ΔCと座屈推進力Ｐとの積（$=\Delta C^TC^{T-1}P$）で表され、２階微分に同等の演算子相当の機能をもつ。ξは固有値、ｕは座屈の変位モードベクトルである。

座屈荷重を最大とする最適断面設計の手法は剛性行列を要素行列の積に分解することと固有値の逆数和を最小とするアルゴリズムによって達成されるが、これは著者等の研究*注の一環であり、それを座屈問題へ応用することで本解析法が可能となった。

座屈荷重の逆数和は固有値の逆数和と同等であり、行列の積のトレースをとることで次のように表わされる。

$$\Sigma(1/\xi)=\Sigma(1/P_{kcr})=\mathrm{Trace}(S^{-1}H)=\mathrm{Trace}(C^{-1}D^{-1}C^{T-1}\Delta C^TC^{T-1}P)$$

3　部材の幾何学的変化量ΔC

部材の幾何学的行列Ｃは節点と部材の幾何学的形状を表すものであり、部材の方向余弦を行列要素に含んでいる。部材ijに着目して、つり合い状態にある部材が外力Ｐにより変形(u_i, v_i)，(u_j, v_j)を生じることにより部材の方向余弦が静止状態から変化する。変形後の方向余弦は静止状態での方向余弦をTaylor展開により求められる。

すなわち、つり合い状態での方向余弦$\lambda_{ijx}(=\cos\beta_{ijx})$，$\lambda_{ijy}(=\sin\beta_{ijy})$より

$$\lambda'_{ijx}=\lambda_{ijx}+\frac{\partial(\lambda_{ijx})u_i}{\partial x_i}+\frac{\partial(\lambda_{ijx})u_j}{\partial x_j}+\frac{\partial(\lambda_{ijx})v_i}{\partial y_i}+\frac{\partial(\lambda_{ijx})v_j}{\partial y_j}$$

$$=\cos\beta_{ijx}+\frac{1}{L_{ij}}\{\sin^2\beta_{ijx}(u_j-u_i)-\cos\beta_{ijx}\cdot\sin\beta_{ijx}(v_j-v_i)\}$$

同様に

$$\lambda'_{ijy}=\lambda_{ijy}+\frac{\partial(\lambda_{ijy})u_i}{\partial x_i}+\frac{\partial(\lambda_{ijy})u_j}{\partial x_j}+\frac{\partial(\lambda_{ijy})v_i}{\partial y_i}+\frac{\partial(\lambda_{ijy})v_j}{\partial y_j}$$

$$=\sin\beta_{ijy}+\frac{1}{L_{ij}}\{-\cos\beta_{ijx}\cdot\sin\beta_{ijx}(u_j-u_i)+\cos^2\beta_{ijx}(v_j-v_i)\}$$

であり、方向余弦の増分は

$$\Delta\lambda_{ijx}=\lambda'_{ijx}-\lambda_{ijx}$$

$$\Delta\lambda_{ijy}=\lambda'_{ijy}-\lambda_{ijy}$$　と表現できる。

上式から方向余弦の増分を行列表示すれば、つぎのようになる。

$$\Delta C_{ij}{}^{T}=\frac{\sin\beta_{ijy}}{L_{ij}}\begin{bmatrix}\sin\beta_{ijy} & \cos\beta_{ijx} & 0\\ -\cos\beta_{ijx} & \sin\beta_{ijy} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}(u_j-u_i-\theta_i)$$

$$-\frac{\cos\beta_{ijx}}{L_{ij}}\begin{bmatrix}\sin\beta_{ijy} & \cos\beta_{ijx} & 0\\ -\cos\beta_{ijx} & \sin\beta_{ijy} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}(v_j-v_i-\theta_j)$$

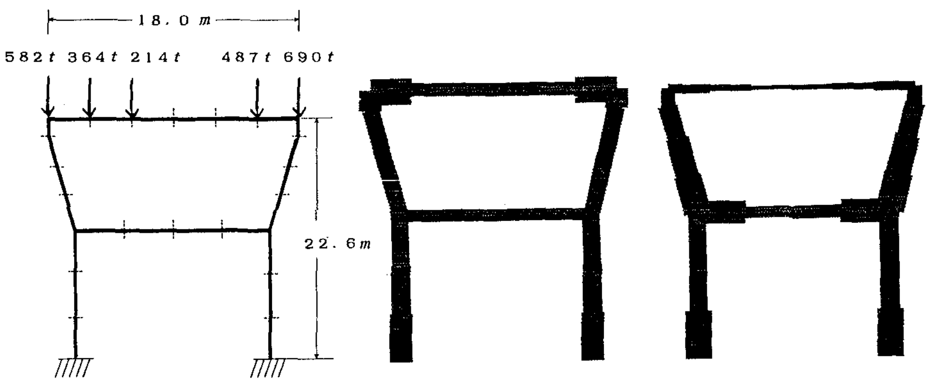
$$=\frac{1}{L_{ij}}[C_{dij}][C_{eij}\ \ C_{eji}]\begin{bmatrix}u_i\\ u_j\end{bmatrix}$$

4　計算例

全体座屈の荷重を最大とする最適設計計算例として、上層が傾斜した柱をもつ門型２層ラーメン橋脚に鉛直死荷重が作用した場合について適用した。設計された初期断面に対する本稿での設計法の最適断面の分布を比較して図示した。柱の回転を拘束するために下水平材が太くなり、上層柱が傾斜しているために下層柱以上に太くなることで座屈に抵抗できるような断面になっていることが認められる。

表－１　最適設計計算結果

項　目		初期設計	最適設計
固有値Σ(1/P_{kcr})		1.128×10^{-2}	0.933×10^{-2}
平均断面積	上水平材	0.298m^2	0.106m^2
	下水平材	0.202	0.308
	上層柱	0.274	0.341
	下層柱	0.304	0.312



設計モデル　　　初期断面積分布　　　最適断面積分布

図－１　初期断面と最適断面との断面積比較

＊注）参考文献：例えば、K. NAKAGAWA et al.:A Method of Minimization of Squre of the Natural Periods of Vabration of a Frame ,Computer and Structure ,Vol.32,No.6,1989