I－427

時空間場の確率特性を厳密に満足する条件付シミュレーション

鳥取大学大学院　学生員　大霜　正樹
鳥取大学工学部　正会員　野田　茂
武蔵工業大学工学部　正会員　星谷　勝

1. はじめに

地震動モニタリングシステムにおいては、時間的・空間的な地震環境情報の把握が極めて重要であり、かつ異常値の発見やシステムの被害の同定などを行う必要がある。この目的のため、観測データから、未観測点の代表的物理量を推定したり、その推定精度を分析する研究[1),2)]がこれまで実施されてきた。本研究では、文献1)とは異なるアプローチによって、観測点以外の未観測点における地震波動サンプル値を実現する条件付シミュレーション理論を提案する。

2. 基本的定式化

ここでは定常・均一場(平均値は０、共分散は既知)を対象にする。しかし、以下の議論を非定常・非均一場に拡張できることは自明であろう。

N地点で、時空間確率場 $W(X_i,k)$ $(i=1\sim N, k=1\sim NT)$ が与えられているとする。このとき、未観測点 X_rの時間ステップ kのデータ $W^*(X_r,k)$ は、推定誤差$\epsilon(X_r,k)$ と未知の重み係数$\lambda_{ij}(X_r)$ を用いれば、次式で補間できる。

$$\left.\begin{aligned} W^*(X_r,k) &= \hat{W}(X_r,k)+\epsilon(X_r,k) \\ \text{ただし、}\ \hat{W}(X_r,k) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=-\alpha}^{\beta}\lambda_{ij}(X_r)W(X_i,k+j) \\ \epsilon(X_r,k) &= W(X_r,k)-\hat{W}(X_r,k) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\text{ここに、}\ \begin{aligned} \alpha &= M\{1-H(1-k+M)\}+(k-1)H(1-k+M) \\ \beta &= M\{1-H(k+M-NT)\}+(NT-k)H(k+M-NT) \end{aligned}$$

不偏推定より、$E[\hat{W}(X_r,k)]=E[W^*(X_r,k)]=E[\epsilon(X_r,k)]=0$ となる。一方、式(1)の重み係数$\lambda_{ij}(X_r)$は、$E[\epsilon(X_r,k)^2]\rightarrow Min$ より、

$$C(d_{rm},-n)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=-\alpha}^{\beta}\lambda_{ij}(X_r)C(d_{im},j-n) \quad (m=1\sim N, n=-\alpha\sim\beta) \tag{2}$$

を解けば、求められる。ここに、$C(d_{ij},\ell)$ は、2点 i と j間の距離 $d_{ij}(=\| X_i-X_j \|)$ および時間差 ℓからなる共分散関数である。

式(2)が成り立つと、最小誤差分散は、

$$\sigma_\epsilon{}^2 = E[\epsilon(X_r,k)^2] = C(0,0)-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=-\alpha}^{\beta}\lambda_{ij}(X_r)C(d_{ri},-j) \tag{3}$$

となる。また、簡単な計算の結果、$E[\hat{W}(X_r,k)\epsilon(X_r,k)]=E[W(X_i,k+j)\epsilon(X_r,k)]=0$ $(j=-\alpha\sim\beta)$ が言える。

一方、

$$\begin{aligned} & E[\hat{W}(X_r,k+\ell)\epsilon(X_r,k)] \qquad (-\alpha\le\ell\le\beta\text{のとき}) \\ &= \sum_{i_1=1}^{N}\sum_{j_1=-\alpha}^{\beta}\lambda_{i_1j_1}(X_r)\{C(d_{i_1r},\ell+j_1)-\sum_{i_2=1}^{N}\sum_{j_2=-\alpha}^{\beta}\lambda_{i_2j_2}(X_r)C(d_{i_1i_2},\ell+j_1-j_2)\} \\ &\neq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} & E[\epsilon(X_r,k)\epsilon(X_r,\ell)] \quad (k\neq\ell\text{のとき}) \\ &= C(0,k-\ell)-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=-\alpha}^{\beta}\lambda_{ij}(X_r)C(d_{ri},k-\ell-j) \\ &\quad -\sum_{i_1=1}^{N}\sum_{j_1=-\alpha}^{\beta}\lambda_{i_1j_1}(X_r)\{C(d_{ri_1},\ell-k-j_1)-\sum_{i_2=1}^{N}\sum_{j_2=-\alpha}^{\beta}\lambda_{i_2j_2}(X_r)C(d_{i_1i_2},k+j_1-\ell-j_2)\} \end{aligned} \tag{5}$$

の確率的特性も、容易に求めることができる。

以上の性質のいくつかは、既に、文献1)で明らかにされている。

3. サンプル場の条件付シミュレーション

未観測点におけるサンプル場$\underline{W}^*(X_r,k)$は、式(1)より、次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \underline{W}^*(X_r,k) &= \underline{\hat{W}}(X_r,k)+\underline{\epsilon}(X_r,k) \\ \text{ただし、}\ \underline{\hat{W}}(X_r,k) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=-\alpha}^{\beta}\lambda_{ij}(X_r)\underline{W}(X_i,k+j) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式(4)と式(5)よりわかるように、推定誤差$\epsilon(X_r,k)$は、$\epsilon(X_r,k+\ell)$および$\hat{W}(X_r,k+\ell)$ $(\ell=-\alpha\sim-1)$と相関関係があるので、ノンホワイトノイズである。従って、式(6)のサンプル場$\underline{\epsilon}(X_r,k)$は、このことを考慮して、シミュレートしなければならない。

今、$X_{\hat{W}_k}=\{\cdots\hat{W}(X_r,k+\ell)\cdots\}^T$、$X_{\epsilon_k}=\{\cdots\epsilon(X_r,k+\ell)\cdots\}^T$ $(\ell=-\alpha\sim-1)$と$\epsilon_k(=\epsilon(X_r,k))$をまとめて、$X_k=\{X_{\hat{W}_k}{}^T\quad X_{\epsilon_k}{}^T\quad\epsilon_k\}$とおく。$X_k$の共分散を求め、条件付確率理論を適用すれば、$\epsilon(X_r,k)$のサンプル場は次のようになる。

$$\underline{\epsilon}(X_r,k) \;=\; BA^{-1}\left\{\begin{array}{c}\underline{X}_{\hat{W}_k}\\ \underline{X}_{\epsilon_k}\end{array}\right\}+\sqrt{\sigma_\epsilon{}^2-BA^{-1}B^T}\cdot R_k \tag{7}$$

ここに、R_kは標準正規乱数（ホワイトノイズ）である。$\underline{X}_{\hat{W}_k}=\{\cdots\underline{\hat{W}}(X_r,k+\ell)\cdots\}^T$と$\underline{X}_{\epsilon_k}=\{\cdots\underline{\epsilon}(X_r,k+\ell)\cdots\}^T$ $(\ell=-\alpha\sim-1)$は、推定量$\underline{\hat{W}}$(式(6))およびϵの過去のサンプル場（式(7)）から得られる既知の量である。また、式(7)において、上式の確率的特性を考慮すれば、

$$\left.\begin{aligned} B &= (B_1\quad B_2)\\ &= (E[\epsilon_k X_{\hat{W}_k}{}^T]\quad E[\epsilon_k X_{\epsilon_k}{}^T])\\ A &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2{}^T\\ A_2 & A_3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} E[X_{\hat{W}_k}X_{\hat{W}_k}{}^T] & E[X_{\hat{W}_k}X_{\epsilon_k}{}^T]\\ E[X_{\epsilon_k}X_{\hat{W}_k}{}^T] & E[X_{\epsilon_k}X_{\epsilon_k}{}^T]\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

である。

式(7)を書き改めると、次式が得られる。

$$\underline{\epsilon}(X_r,k) \;=\; Q_1\underline{X}_{\hat{W}_k}+Q_2\underline{X}_{\epsilon_k}+\sqrt{Q_3}R_k \tag{9}$$

ここに、

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= B_1(A_1{}^{-1}+PS^{-1}P^T)-B_2S^{-1}P^T\\ Q_2 &= -B_1PS^{-1}+B_2S^{-1}\\ Q_3 &= \sigma_\epsilon{}^2-B_1(A_1{}^{-1}+PS^{-1}P^T)B_1{}^T+2B_2S^{-1}P^TB_1{}^T-B_2S^{-1}B_2{}^T\\ P &= A_1{}^{-1}A_2{}^T\\ S &= A_3-A_2P\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式(8)におけるB_1とA_2は式(4)から、B_2とA_3は式(3)および式(5)から評価できる。一方、A_1の要素は式(11)と式(12)で表せる。

$$\begin{aligned} &E[\hat{W}(X_r,k+\ell)\hat{W}(X_r,k+m)]\quad(-\alpha\le\ell,m\le-1)\\ &=\sum_{i_1=1}^{N}\sum_{j_1=-\alpha}^{\beta}\sum_{i_2=1}^{N}\sum_{j_2=-\alpha}^{\beta}\lambda_{i_1j_1}(X_r)\lambda_{i_2j_2}(X_r)C(d_{i_1i_2},\ell+j_1-m-j_2)\end{aligned} \tag{11}$$

$$E[\hat{W}(X_r,k)^2] \;=\; \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=-\alpha}^{\beta}\lambda_{ij}(X_r)C(d_{ri},-j) \tag{12}$$

4. 確率場の特性とまとめ

以上の確率的性質から、未観測点の確率場は次の２つの特性をもつ。一つは、簡単な計算から、無条件確率場において、

$$\left.\begin{aligned} E[W^*(X_r,k)^2] &= C(0,0)\\ E[W^*(X_r,k)W^*(X_r,\ell)] &= C(0,k-\ell)\quad(k\neq\ell)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

が成り立つ。式(13)は、$W^*(X_r,k)$の共分散が無条件場のそれに等しいことを意味する。

一方、条件付確率場では、

$$\left.\begin{aligned} \mu_{W^*(X_r,k)/cond.} &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=-\alpha}^{\beta}\lambda_{ij}(X_r)\underline{W}(X_i,k+j)\\ \sigma^2_{W^*(X_r,k)/cond.} &= C(0,0)-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=-\alpha}^{\beta}\lambda_{ij}(X_r)C(d_{ri},-j)\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

が成り立つ。

この結果、ここで誘導した式は厳密に確率場の特性を満足していることがわかる。

条件付シミュレーションに必要な式は式(6)と式(9)である。推定誤差ϵはARモデルで表現される。なお、複数の未観測点のサンプル時系列をシミュレートするのに、推定したサンプル実現値を観測データに加えて、漸次、データ数Nを１つずつ拡張していくことにより、同様な議論ができることは言うまでもない。

参考文献

1) Hoshiya, M. and Maruyama, M. : Stochastic interpolation of earthquake wave propagation, ICOSSAR'93 (accepted for publication).
2) Kameda, H. and Morikawa, H. : Conditioned stochastic processes for conditional random fields, A.S.C.E., Journal of E.M. Div. (submitted for publication).