土木学会第48回年次学術講演会（平成5年9月）

I－426　対数正規確率場における条件付ブロック推定

鳥取大学工学部　正　野田 茂
武蔵工業大学工学部　正　星谷 勝

1. はじめに

著者らは、文献1)において、対数正規確率場の特性が厳密にわかっているとき、複数地点の観測データから任意地点の物理量を推定したり、あるいはサンプル場をシミュレートする手法を提案した。ここでは、このような点推定ではなく、有限な面積あるいは体積を有するブロック(任意形状)の平均的な物理量を推定する問題、いわゆるBlock Krigingを取り扱う。

2. 問題の設定

対数正規確率場において、x_i 地点の物理量 $W(x_i)$ の平均値は $m(x_i)$ 、分散は $\sigma^2(x_i)$ 、x_i 地点と x_j 地点の共分散は $C(W(x_i),W(x_j))$ であると仮定する。一方、$W(x_i)$ を変換した正規確率場では、$lnW(x_i)$ に対し、平均値 $m_e(x_i)$ 、分散$\sigma_e^2(x_i)$ と共分散 $C_e(W(x_i),W(x_j))$ を有する。両確率場において、確率特性は数学的に関係づけられる。

今、面積(あるいは体積) S を有するあるブロックの平均的な物理量は、面積分(体積積分)によって、次式で表せる。ただし、z はブロック S 内の任意地点を示す。

$$W_S = \frac{1}{S}\int_{z\in S} W(z)dz \tag{1}$$

以上より、異なる2つのブロック S と S' における平均的物理量の共分散は、

$$C(W_S,W_{S'}) = \frac{1}{SS'}\int_{z\in S}\int_{z'\in S'} m(z)m(z')(e^{C_e(\overline{zz'})}-1)dzdz' \tag{2}$$

の関係をもつことがわかる。ここに、z' はブロック S' 内の任意位置を、$C_e(\overline{zz'})$ は距離$\overline{zz'}$だけ離れた2点 z と z' における物理量の共分散を意味する。

ここでは、N地点の観測データ $(W(x_i), i=1\sim N)$ が得られた条件下で、ブロック S における平均的物理量の推定値 $\widehat{W_S}$ を求める問題を考える。

文献1)より、未知量 $\lambda_i(i=1\sim N)$ と kを用いると、次式が成り立つ。

$$\widehat{W}_S = exp\left(k+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i ln\, W(x_i)\right) \tag{3}$$

$$E[\widehat{W}_S] = exp\left[k+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\Big\{ln\, m(x_i)-\frac{1}{2}\sigma_e^2(x_i)\Big\}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j C_e(W(x_i),W(x_j))\right] \tag{4}$$

3. 条件付推定値

不偏性の条件から、

$$E[\widehat{W}_S] = E[W_S] = \frac{1}{S}\int_{z\in S} m(z)dz \tag{5}$$

が成り立つので、式(4)と式(5)を等置すれば、パラメーター k は次式のようになる。

$$\begin{aligned} k &= ln\frac{1}{S}\int_{z\in S} m(z)dz-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i ln\, m(x_i) \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j C_e(W(x_i),W(x_j))+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\sigma_e^2(x_i) \end{aligned} \tag{6}$$

確率場の特性が厳密にわかっているとき、不偏推定値は次式で求められる。

$$\begin{aligned} \widehat{W}_S &= exp\Big[ln\Big(\frac{1}{S}\int_{z\in S} m(z)dz/\prod_{i=1}^{N} m(x_i)^{\lambda_i}\Big)+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i ln\, W(x_i) \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\Big\{\sigma_e^2(x_i)-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j C_e(W(x_i),W(x_j))\Big\}\Big] \end{aligned} \tag{7}$$

一方、平均値が未知で、共分散が既知なとき、

$$\prod_{i=1}^{N} m(x_i)^{\lambda_i} = \frac{1}{S}\int_{z\in S} m(z)dz \tag{8}$$

が成り立つ。このときの推定量は、式(6)から、次式で表せる。

$$\widehat{W}_S = exp\left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i ln\, W(x_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\Big\{\sigma_e^2(x_i) - \sum_{j=1}^{N}\lambda_j C_e(W(x_i), W(x_j))\Big\}\right] \tag{9}$$

4. 重み係数の決定と条件付分散

式 (7) および式 (9) において、重み係数の$\lambda_i(i = 1 \sim N)$ は最小誤差分散推定から求められる。つまり、次式の誤差分散を最小化するように決めればよいことになる。

$$\sigma^2(\widehat{W_S} - W_S) = \sigma^2(\widehat{W_S}) + \sigma^2(W_S) - 2C(\widehat{W_S}, W_S) \tag{10}$$

式 (10) 右辺の 3 つの項は、対数正規分布と正規分布の関係および式 (1) の定義より、式変形を施せば、次式で表せる。

$$\sigma^2(\widehat{W_S}) = \left(\frac{1}{S}\int_{z\in S} m(z)dz\right)^2 \left\{exp\Big(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j C_e(W(x_i), W(x_j))\Big) - 1\right\} \tag{11}$$

$$\sigma^2(W_S) = \frac{1}{S}\int_{z\in S} m(z)^2(e^{\sigma_e^2(z)} - 1)dz \tag{12}$$

$$C(\widehat{W_S}, W_S) = \frac{1}{S^2}\int_{z\in S} m(z)dz \int_{z\in S} m(z)\left\{exp\Big(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i C_e(W(x_i), W(z))\Big) - 1\right\} dz \tag{13}$$

式 (11) ～式 (13) を式 (10) に代入すれば、誤差分散が得られる。これを最小化するようにλ_iを求めると、不偏推定かつ最小誤差分散推定を満たすようなブロック推定の補間を与えることができる。

平均値が既知のとき、式 (10) をλ_iで偏微分すると、λ_iは次式の非線形連立方程式を満足しなければならないことがわかる。

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j C_e(W(x_i), W(x_j)) = \frac{\int_{z\in S} m(z)C_e(W(x_i), W(z))exp\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i C_e(W(x_i), W(z)\right)dz}{exp\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j C_e(W(x_i), W(x_j))\right)\int_{z\in S} m(z)dz} \quad (i = 1 \sim N) \tag{14}$$

一方、平均値が未知のときには、不偏推定の条件 (式 (8)) 下で、式 (10) を最小化しなければならない。このため、ラグランジェ乗数 μ を導入して、次式の拡張された評価関数 Δ の最小化を図る。

$$\Delta = \sigma^2(\widehat{W_S} - W_S) - 2\mu\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i ln\; m(x_i) - ln\;\frac{1}{S}\int_{z\in S} m(z)dz\right) \longrightarrow Min \tag{15}$$

Δを $\lambda_i(i = 1 \sim N)$ と μ で偏微分すれば、λ_i と μは、式 (8) と式 (16) を連立させて、反復的に解けば、得られることになる。

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j C_e(W(x_i), W(x_j)) = \frac{\int_{z\in S} m(z)C_e(W(x_i), W(z))e^{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i C_e(W(x_i), W(z))}dz - \frac{\mu lnm(x_i)}{\frac{1}{s^2}\int_{z\in S} m(z)dz}}{e^{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j C_e(W(x_i), W(x_j))}\int_{z\in S} m(z)dz} \quad (i = 1 \sim N) \tag{16}$$

5. おわりに

対数 Kriging の最適推定および最小誤差分散推定の問題は、点推定の場合 (文献 1) 参照) と異なり、重み係数やラグランジェ乗数を決定するのに、非線形連立方程式を解かなければならない。つまり、平均値が既知のときは式 (14) を、未知のときは式 (8) と式 (16) を、まず、解く必要がある。これらの値を式 (7) あるいは式 (9) に代入すると、条件付最適推定値が、さらに式 (10) ～式 (13) に代入すれば、最小誤差分散推定が得られる。このように、条件付平均値や条件付分散をシンプルに陽な式で表せない特徴がある。しかし、この理論の工学的応用範囲の広さに関しては明らかであろう。なお、$S \rightarrow 0$ の極限、すなわちブロックを小さくしていけば、ブロック推定は点推定 (文献 1)) に完全に一致することも明らかである。

参考文献

1) 星谷勝・野田茂・笠野智成：非正規確率場における補間問題の本質と条件付シミュレーション、土木学会第 48 回年次学術講演会講演概要集、第 1 部、1993 年 9 月.