I-425 未知平均と既知共分散を有する対数正規確率場での条件付推定

（株）セコムIS研究所　正　小川理宏
鳥取大学工学部　正　野田　茂
武蔵工業大学工学部　正　星谷　勝

1. まえがき

最近、確率場の一つの実現事象であるサンプル場を用いて、空間分布を捉える研究が盛んに行われている。中でも、Krigingは、観測値より空間分布を推定できるとともに、空間分布の推定誤差をも確率的に取り扱うことができる有効な方法である。このため、著者らは、対数正規確率場の空間分布を推定したり、条件付シミュレーションを実施する考え方を提案した[1]。ここでは、この考え方を拡張し、未知の平均値（トレンド成分）と既知の共分散（ランダム成分）を有する非均質な対数正規確率場を対象として、空間分布を推定する方法（いわゆる、Universal Kriging）を示す。

2. 前提条件

観測点を $x_i(i=1\sim N)$ 、その物理量を $W(x_i)$ とする。$W(x)$ の平均値は $m(x)$ 、x_i と x_j 地点の共分散（x 地点の分散）は $C(W(x_i),W(x_j))(\sigma^2(x))$ である。対数正規分布と正規分布は関連している。$\ln W(x)$ の平均値を $m_e(x)$ 、共分散（分散）を $C_e(W(x_i),W(x_j))$ $(\sigma_e^2(x))$ で表す。

ここでは、共分散が既知、平均値が未知であるケースを想定する。平均値は、空間座標に依存し、次のように、座標関数 $f_j(x)$ の線形結合で表せると仮定する。

$$\ln m(x)=\sum_{j=0}^{p}\beta_j f_j(x) \tag{1}$$

ここに、β は未知パラメーター（最大 p 次）である。

3. 条件付平均値

未観測点 x_r の推定値 $\widehat{W}(x_r)$ は、未知の重み係数 λ を用いて、次式を満たすように求める。

$$\ln\widehat{W}(x_r)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\ln W(x_i)+k \tag{2}$$

上式の両辺の期待値をとり、対数正規分布と正規分布の関係を用いると、次式が得られる。

$$E[\widehat{W}(x_r)]=\exp\left[k+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left\{\ln m(x_i)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\lambda_jC_e(W(x_i),W(x_j))-\frac{1}{2}\sigma_e^2(x_i)\right\}\right] \tag{3}$$

式(3)は、不偏性の条件（ $E[\widehat{W}(x_r)-W(x_r)]=0$ ）を満足しなければならない。つまり、式(4)をも満たす必要があるので、式(5)が得られる。

$$\ln m(x_r)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\ln m(x_i) \tag{4}$$

$$k=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left\{\sigma_e^2(x_i)-\sum_{j=1}^{N}\lambda_jC_e(W(x_i),W(x_j))\right\} \tag{5}$$

式(5)を式(2)に代入することにより、Krigingの推定値は次のようになる。

$$\widehat{W}(x_r)=\exp\left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\ln W(x_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left\{\sigma_e^2(x_i)-\sum_{j=1}^{N}\lambda_jC_e(W(x_i),W(x_j))\right\}\right] \tag{6}$$

重み係数は、式(4)の条件の下で、正規確率場に変換した誤差分散（式(7)の第1項目）を最小にするように決める。すなわち、ラグランジェ乗数を 2μ として、次式の最小化問題を解けばよい。

$$L=\sigma^2(\ln\widehat{W}(x_r)-\ln W(x_r))-2\mu\left(\ln m(x_r)-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\ln m(x_i)\right) \tag{7}$$

$\partial L/\partial\lambda_i=0(i=1\sim N)$ と $\partial L/\partial\mu=0$ により、次式が成立する。

$$\left.\begin{array}{rcll}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\lambda_jC_e(W(x_i),W(x_j))+\mu\ln m(x_i) &=& C_e(W(x_i),W(x_r)) & (i=1\sim N)\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\ln m(x_i) &=& \ln m(x_r) & \end{array}\right\} \tag{8}$$

上式を解くことによって、$\lambda_i(i=1\sim N)$ と μ が得られる。しかし、上式は、未知量 $m(x)$ を含むために、このままでは解けない。

そこで、式(1)と式(8)から、不偏性の条件を勘案すると、次式が成立することが容易に理解できる。ただし、ラグランジェ乗数 $\mu_k(k=0\sim p)$ を導入している。

$$\left.\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{N}\lambda_j C_e(W(x_i),W(x_j))+\sum_{k=0}^{p}\mu_k f_k(x_i) &=& C_e(W(x_i),W(x_r)) & (i=1\sim N)\\ \sum_{j=1}^{N}\lambda_j f_k(x_j) &=& f_k(x_r) & (k=0\sim p)\end{array}\right\} \tag{9}$$

上式を検討すると、未観測点 x_r が観測点 x_i に一致すると、次式の性質が成立することがわかる。

$$\lambda_i=\left\{\begin{array}{ll}1 \ ; & i=r\\ 0 \ ; & i\neq r\end{array}\right. \quad \mu=0 \quad or \quad \mu_k=0 \qquad (k=0\sim p) \tag{10}$$

式 (9) を式 (5) に代入して k を求め、さらにそれを式 (2) に代入して整理すると、最終的に、未観測点 x_r の対数 Kriging 最適推定値 $\widehat{W_K}(x_r)$ は次のようになる。

$$\widehat{W_K}(x_r)=\exp\left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\ln W(x_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left\{\sigma_e^2(x_i)-C_e(W(x_i),W(x_r))\right\}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p}\mu_k f_k(x_r)\right] \tag{11}$$

ただし、 x_r が観測点 x_i に一致すると、式 (10) より、 $\widehat{W_K}(x_i)=W(x_i)$ となり、推定値は観測値と完全に一致する。

4. 条件付分散

対数 Kriging の誤差分散は、文献 1) を参照すると、

$$\sigma_K^2(x_r)=m(x_r)^2\left(e^{\sigma_e^2(x_r)}+e^{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j Ce(W(x_i),W(x_j))}-2e^{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i Ce(W(x_i),W(x_r))}\right) \tag{12}$$

で表せる。

式 (8) を用いて、上式を変形すると、

$$\sigma_K^2(x_r)=m(x_r)^2e^{\sigma_e^2(x_r)}\left\{1+e^{-\mu\ln m(x_r)-\sigma_{Ke}^2(x_r)}\left(e^{-\mu\ln m(x_r)}-2\right)\right\} \tag{13}$$

ただし、

$$\sigma_{K_e}^2(x_r)=\sigma_e^2(x_r)-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i C_e(W(x_i),W(x_r))-\mu\ln m(x_r) \tag{14}$$

となる。

一方、式 (9) を適用すると、Universal Kriging の誤差分散は次式のように書き改められる。

$$\sigma_K^2(x_r)=m(x_r)^2e^{\sigma_e^2(x_r)}\left\{1+e^{-\sum_{k=0}^{p}\mu_k f_k(x_r)-\sigma_{Ke}^2(x_r)}\left(e^{-\sum_{k=0}^{p}\mu_k f_k(x_r)}-2\right)\right\} \tag{15}$$

ただし、

$$\sigma_{K_e}^2(x_r)=\sigma_e^2(x_r)-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i C_e(W(x_i),W(x_r))-\sum_{k=0}^{p}\mu_k f_k(x_r) \tag{16}$$

式 (13) および式 (15) には未知の平均値 $m(x_r)$ を含むため、誤差分散を定量的に計算することはできない。すなわち、条件付分散は、 $m(x_r)$ を推定して陽に明示しない限り、未定である。そのため、我々の知り得る情報は、変動係数 $\sigma_K(x_r)/m(x_r)$ に限定されることになる。

なお、式 (13) と式 (15) から、 $r=i$ と、未観測点が観測点に一致すると、式 (10) の性質から、$\sigma_K^2(x_r)=0$ となることがわかる。すなわち、未観測点 x_r が既観測点に一致したとき、推定値 $\widehat{W}_K(x_r)$ は完全に観測値 $W(x_i)$ に一致することがわかる。

5. あとがき

本小文では、先験的知識によって、あるいは観測データから、対数正規確率場の共分散は既知だが、平均値は完全に知られていない場合に対し、条件付推定問題をどのように捉えるかを議論した。その結果、平均値という重要な特性が未知なため、1) 未観測点の推定値は Simple Kriging のもの[1]よりもよくならないことや、2) 推定精度は条件付分散ではなく、変動係数でしか分析できないこと、などがわかった。なお、本理論の応用例については文献 2) を参照されたい。

参考文献

1) 星谷勝・野田茂・笠野智成：非正規確率場における補間問題の本質と条件付シミュレーション、土木学会第 48 回年次学術講演会講演概要集、第 1 部、1993 年 9 月.

2) 藤田章弘・野田茂：時空間的重要度を考慮したライフラインの最適復旧戦略、土木学会第 48 回年次学術講演会講演概要集、第 1 部、1993 年 9 月.