

I-424 漸次拡張方式による条件付推定問題の理論的および実証的検討

鳥取大学大学院 学 長舟 健
鳥取大学工学部 正 野田 茂
武蔵工業大学工学部 正 星谷 勝

1. まえがき

文献 1) および 2) においては、複数の観測データが与えられたという条件下で、未観測点のサンプル場をシミュレートするとき、漸次拡張方式を提案している。しかし、両論文とも、1) 未観測点(複数)のサンプル場を同時にシミュレートしたとき(多点同時推定方式)と、2) 順次 1 つずつ観測点の数を増やすことにより、複数の未観測点のサンプル場を推定したとき(漸次拡張方式)で、両方式の確率的関係がどのようになっているのか、明確には議論していない。そこで、本小文では、この問題に対し、理論的証明を与えるとともに、数値解析によって、漸次拡張方式の有効性を議論する。

2. 多点同時推定方式と漸次拡張方式の関係

ここでは、正規確率場に対し、問題の本質を見失わないように、非常に単純なケースを考える。一つは、観測情報 x の条件下で、複数のデータ (y_1 と y_2) を同時に推定する方式である。他は、 x の条件下で y_1 を推定し、さらにこれらの条件の下で、 y_2 を漸次推定する方式である。

表記上、以下の記号を定義しておく。

$$\left. \begin{aligned} E(y) &= \mu_y & Cov(y, x) &= V_{yx} = V_{xy} \\ E(x) &= \mu_x & \hat{E}(y | x) &= \mu_y + V_{yx} V_{xx}^{-1}(x - \mu_x) \\ Cov(y) &= V_{yy} & Cov(y - \hat{E}(y | x)) &= V_{yy} - V_{yx} V_{xx}^{-1} V_{xy} \\ Cov(x) &= V_{xx} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

多点同時推定方式においては、次の条件付期待値と条件付共分散を得る。

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{E}(y_1 | x) \\ \hat{E}(y_2 | x) \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} \mu_{y_1} + V_{y_1 x} V_{xx}^{-1}(x - \mu_x) \\ \mu_{y_2} + V_{y_2 x} V_{xx}^{-1}(x - \mu_x) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left[\begin{aligned} Cov(y_1 - \hat{E}(y_1 | x)) & Cov(y_1 - \hat{E}(y_1 | x), y_2 - \hat{E}(y_2 | x)) \\ Cov(y_2 - \hat{E}(y_2 | x), y_1 - \hat{E}(y_1 | x)) & Cov(y_2 - \hat{E}(y_2 | x)) \end{aligned} \right] \\ = \left[\begin{aligned} V_{y_1 y_1} - V_{y_1 x} V_{xx}^{-1} V_{x y_1} & V_{y_1 y_2} - V_{y_1 x} V_{xx}^{-1} V_{x y_2} \\ V_{y_2 y_1} - V_{y_2 x} V_{xx}^{-1} V_{x y_1} & V_{y_2 y_2} - V_{y_2 x} V_{xx}^{-1} V_{x y_2} \end{aligned} \right] \quad (3)$$

一方、漸次拡張方式による条件付確率特性は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{E}(y_2 | y_1, x) &= \hat{E}(y_2 | x) + Cov(y_2, e(y_1 | x)) Cov(e(y_1 | x))^{-1} e(y_1 | x) \\ \text{ここに、} e(y_1 | x) &= y_1 - \hat{E}(y_1 | x) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$Cov(y_2 - \hat{E}(y_2 | y_1, x)) = Cov(y_2 - \hat{E}(y_2 | x)) - Cov(y_2, e(y_1 | x)) Cov(e(y_1 | x))^{-1} Cov(e(y_1 | x), y_2) \quad (5)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \hat{E}(y_2 | x) &= \mu_{y_2} + V_{y_2 x} V_{xx}^{-1}(x - \mu_x) \\ e(y_1 | x) &= y_1 - \hat{E}(y_1 | x) \\ &= y_1 - \mu_{y_1} - V_{y_1 x} V_{xx}^{-1}(x - \mu_x) \\ Cov(y_2 - \hat{E}(y_2 | x)) &= V_{y_2 y_2} - V_{y_2 x} V_{xx}^{-1} V_{x y_2} \\ Cov(e(y_1 | x)) &= Cov(y_1 - \hat{E}(y_1 | x)) \\ &= V_{y_1 y_1} - V_{y_1 x} V_{xx}^{-1} V_{x y_1} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

であるから、

$$\begin{aligned} Cov(y_2, e(y_1 | x)) &= Cov(y_2, y_1 - \hat{E}(y_1 | x)) \\ &= Cov(y_2, (y_1 - \mu_{y_1}) - V_{y_1 x} V_{xx}^{-1}(x - \mu_x)) \\ &= Cov(y_2, y_1 - \mu_{y_1}) - V_{y_1 x} V_{xx}^{-1} Cov(y_2, x - \mu_x) \\ &= V_{y_2 y_1} - V_{y_1 x} V_{xx}^{-1} V_{x y_2} \end{aligned} \quad (7)$$

となる。同様にして、次式が成り立つ。

$$Cov(e(y_1 | x), y_2) = V_{y_1 y_2} - V_{y_1 x} V_{xx}^{-1} V_{x y_2} \quad (8)$$

以上の結果より、式 (4) と式 (5) は次のように書き改められる。

$$\begin{aligned} \hat{E}(y_2 | y_1, x) &= \mu_{y_2} + V_{y_2 x} V_{xx}^{-1}(x - \mu_x) \\ &+ (V_{y_2 y_1} - V_{y_1 x} V_{xx}^{-1} V_{x y_2}) (V_{y_1 y_1} - V_{y_1 x} V_{xx}^{-1} V_{x y_1})^{-1} \{y_1 - \mu_{y_1} - V_{y_1 x} V_{xx}^{-1}(x - \mu_x)\} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Cov(y_2 - \hat{E}(y_2 | y_1, x)) &= V_{y_2 y_2} - V_{y_2 x} V_{xx}^{-1} V_{x y_2} \\ &- (V_{y_2 y_1} - V_{y_1 x} V_{xx}^{-1} V_{x y_2}) (V_{y_1 y_1} - V_{y_1 x} V_{xx}^{-1} V_{x y_1})^{-1} (V_{y_1 y_2} - V_{y_1 x} V_{xx}^{-1} V_{x y_2}) \end{aligned} \quad (10)$$

式(2)と式(3)を用いれば、

$$\hat{E}(y_2 | y_1, x) = \hat{E}(y_2 | x) + Cov(y_2 - \hat{E}(y_2 | x), y_1 - \hat{E}(y_1 | x)) Cov(y_1 - \hat{E}(y_1 | x))^{-1} (y_1 - \hat{E}(y_1 | x)) \quad (11)$$

$$Cov(y_2 - \hat{E}(y_2 | y_1, x)) = Cov(y_2 - \hat{E}(y_2 | x))$$

$$- Cov(y_2 - \hat{E}(y_2 | x), y_1 - \hat{E}(y_1 | x)) Cov(y_1 - \hat{E}(y_1 | x))^{-1} Cov(y_1 - \hat{E}(y_1 | x), y_2 - \hat{E}(y_2 | x)) \quad (12)$$

が成り立つ。これらの式は、漸次拡張方式による確率的特性(式(9)と式(10))と完全に一致する。

以上の結果、多点同時推定方式と漸次拡張方式による確率特性は理論的に同一になることが証明された。

3. 条件付シミュレーションの数値的検証

2.の議論は非正規確率場においても厳密に成り立つ。ここでは、著者らが提案した対数正規確率場における条件付シミュレーション理論(漸次拡張方式)³⁾を用いて、この理論の厳密性を数値的に実証する。

ここでは、簡単のため、1次元の補間(内挿・外挿)問題を取り扱う。確率場として、平均値は $E(W(x)) = 2(1 + \sin \frac{\pi}{50} x)$ 、共分散は $Cov(W(x), W(y)) = 2e^{-\frac{|x-y|}{4}}$ を有すると仮定する。観測値は等間隔に11点与えた。これは、1観測データから、10地点のサンプル場をシミュレートして得たものである。

図1は条件付平均値(実線)を、図2は条件付分散(実線)を示したものである。点線は、無条件場の平均値 $E(W(x))$ と分散 $Cov(W(x)) (= 2)$ である。○印は観測値を意味する。図中(a)は理論値、(b)は漸次拡張方式によるシミュレーション結果である。これは、各地点において、1,000サンプルを抽出し、その統計量に対応する。なお、シミュレーションでは、11地点のデータを用いて、左から右の方向へ、1つずつサンプル実現値を得、それを観測データに取り込み、順次拡張して計算した。

シミュレーションによる結果は理論解とほぼ一致している。また、未観測点が観測点と一致するときには、観測されたサンプル場と完全に同じである。観測点間の条件付平均値は無条件場の平均値に近づこうとしている。この傾向は、観測値が無条件場の平均値より大きくても小さくても同じである。観測の位置とその大きさにより、条件付分散は無条件場の分散よりも大きくなる可能性があることに注意しなければならない。すなわち、このことは、正規場の補間問題と異なり、条件を与えることで不確定性を減少させる指標として、条件付分散を用いることができないことを意味する。

図より、推定位置が観測点より離れた場合、条件付の平均値と分散はそれぞれ無条件場の値に漸近していることがわかる。つまり、観測位置から離れた点を外挿すると、観測値の影響を受けなくなり、無条件場の確率特性を満たす。これらの事実、文献3)で提示した理論によって、内挿・外挿問題を解くのに有効であることを示唆している。

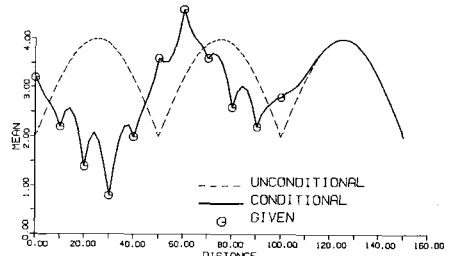
条件付確率場の推定精度を明示する指標は、条件付分散よりもむしろKrigingによる推定誤差分散である³⁾。図3はそれを図示したものである。1)内挿地点の推定誤差分散は無条件場の分散よりも大きくならないことや2)観測点より遠く離れる(外挿)と、誤差分散は無条件場の分散に漸近していくこと、などが理解できる。

4. あとがき

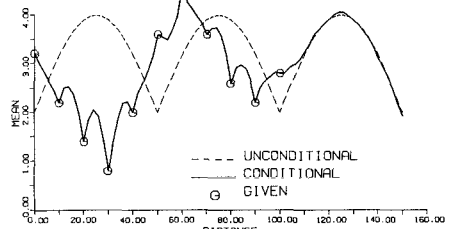
漸次拡張方式による条件付推定および条件付シミュレーションは、データを逐次取り込みながら、オンラインで処理でき、かつ計算容量ならびに数値的安定性などの面で優れている。また、理論的な厳密性を有しており、大領域の確率場(空間的ならびに時空間的)の数値計算法としての工学上の応用範囲は広い。さらに、非線形・非正規の確率場でも、推定誤差分散を容易に得ることができるメリットをもつ。

参考文献

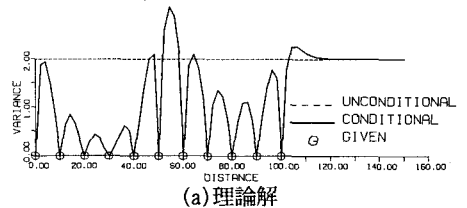
- 1) 星谷勝: 条件付確率場のシミュレーション理論、土木学会論文集、No.459/I-22、pp.113~118、1993年1月。
- 2) Kameda, H. and Morikawa, H.: Conditioned stochastic processes for conditional random fields, A.S.C.E., Journal of E.M.Div. (submitted for publication).
- 3) 星谷勝・野田茂・笠野智成: 非正規確率場における補間問題の本質と条件付シミュレーション、土木学会第48回年次学術講演会講演概要集、第1部、1993年9月。



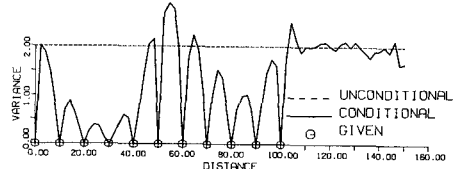
(a)理論解



(b)漸次拡張方式によるシミュレーション
図1 条件付平均値



(a)理論解



(b)漸次拡張方式によるシミュレーション
図2 条件付分散

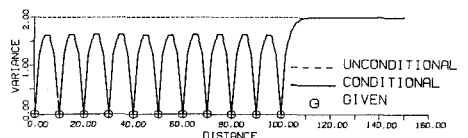


図3 対数Krigingによる推定誤差分散