I－423

非正規確率場における補間問題の本質と条件付シミュレーション

武蔵工業大学工学部　正会員　星谷　勝
鳥取大学工学部　正会員　野田　茂
矢作建設工業（株）　正会員　笠野　智成

1. まえがき

著者の一人は、正規確率場における条件付理論に対し、推定問題およびシミュレーションの両面から考察を与え、漸次拡張方式と言う一つの方法を提案した[1]。本小文では、非正規あるいは非線形な確率場において、これらの諸問題を取り扱い、正規確率場とは異なる補間問題の本質を探る。現実に得られるデータの中には、その生起機構や何らかの非線形変換の結果、$W = \Phi(W_e)$ （Φ： 非線形関数、W： 実データ、W_e： 変換データ）として、正規変量 W_eと結びつけられるものがある。ここでは、簡単のため、対数正規確率場を対象に取り扱う。ただし、以下の議論は、その他の非正規確率場にも適用できることは明らかである。

2. 前提条件

空間位置 Xでの対数正規確率場の物理量 $W(X)$ は、平均値 $m(X)$ と共分散 $C(W(X_i),W(X_j))$ （分散 $\sigma^2(X)$）を有する。一方、$\ln W(X)$ は正規分布をするが、その平均値を $m_e(X)$ 、共分散を $C_e(W(X_i),W(X_j))$ （分散$\sigma_e{}^2(X)$）とする。

対数正規分布と正規分布の関係から、次式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} m(X) &= e^{m_e(X)+\frac{1}{2}\sigma_e{}^2(X)} \\ C(W(X_i),W(X_j)) &= m(X_i)m(X_j)\left(e^{C_e(W(X_i),W(X_j))}-1\right) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ここでは、1) 確率場における平均値と共分散は完全に知られている、および 2) 必ずしも均一場に限定しない問題を設定する。このとき、既知の観測量$\underline{W}(X_i)$ $(i = 1 \sim N)$ から、未観測点 X_rの物理量$\widehat{W}(X_r)$ を推定したり、サンプル場$\widehat{\underline{W}}(X_r)$ をシミュレートする理論を提案する。

3. 条件付推定問題

X_r地点の推定値 $\ln\widehat{W}(X_r)$ は、未知の重み係数λ_i $(i = 1 \sim N)$ によって、次式の線形式で表せる。

$$\ln \widehat{W}(X_r) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \ln W(X_i) + k \tag{2}$$

式 (2) より、$\ln \widehat{W}(X_r)$ の平均値と分散は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} E[\ln \widehat{W}(X_r)] &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left(\ln m(X_i) - \frac{1}{2}\sigma_e{}^2(X_i)\right) + k \\ \sigma^2(\ln \widehat{W}(X_r)) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \lambda_i\lambda_j C_e(W(X_i),W(X_j)) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式 (1) から、次式が成り立つので、

$$E[\widehat{W}(X_r)] = \exp\left[k + \sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left\{\ln m(X_i) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j C_e(W(X_i),W(X_j)) - \frac{1}{2}\sigma_e{}^2(X_i)\right\}\right] \tag{4}$$

不偏性の条件 $(E[\widehat{W}(X_r) - W(X_r)] = 0)$ を考えれば、式 (5) が得られる。

$$k = \ln m(X_r) - \sum_{i=1}^{N}\lambda_i \ln m(X_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j C_e(W(X_i),W(X_j)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\sigma_e{}^2(X_i) \tag{5}$$

従って、式 (5) を式 (2) に代入すれば、次式が与えられる。

$$\begin{aligned} \widehat{W}(X_r) = \exp\Bigg[&\left\{\ln m(X_r) - \sum_{i=1}^{N}\lambda_i \ln m(X_i)\right\} + \widehat{W}_e(X_r) \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left\{\sigma_e{}^2(X_i) - \sum_{j=1}^{N}\lambda_j C_e(W(X_i),W(X_j))\right\}\Bigg] \end{aligned} \tag{6}$$

$$\text{ただし、}\widehat{W}_e(X_r) = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i \ln \underline{W}(X_i)$$

上式の重み係数は最小誤差分散推定を満たすように決めればよい。誤差分散は次式で与えられる。

$$\sigma^2(\widehat{W}(X_r) - W(X_r)) = \sigma^2(\widehat{W}(X_r)) + \sigma^2(W(X_r)) - 2E[(\widehat{W}(X_r) - m(X_r))(W(X_r) - m(X_r))] \tag{7}$$

ただし、式 (7) 右辺の 3 つの項は、式 (1) の関係を利用すると、

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2(\widehat{W}(Xr)) &= m(X_r)^2\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j C_e(W(X_i),W(X_j))\right\} - 1\right] \\ \sigma^2(W(X_r)) &= m(X_r)^2\left(e^{\sigma_e{}^2(X_r)} - 1\right) \\ E\left[(\widehat{W}(X_r) - m(X_r))(W(X_r) - m(X_r))\right] &= m(X_r)^2\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i C_e(W(X_i),W(X_r))\right\} - 1\right] \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

となる。その結果、推定誤差分散は次式で表せる。

$$\sigma^2(\widehat{W}(X_r)-W(X_r)) = m(X_r)^2\left(e^{\sigma_e{}^2(X_r)} + e^{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j C_e(W(X_i),W(X_j))} - 2e^{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i C_e(W(X_i),W(X_r))}\right) \tag{9}$$

式 (9) をλ_i $(i=1\sim N)$ で偏微分して 0 とおくと、重み係数に関する連立方程式が得られる。

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j C_e(W(X_i),W(X_j)) = C_e(W(X_i),W(X_r)) \quad (i=1\sim N) \tag{10}$$

ここで、X_rが X_iに一致するとき、$\lambda_i=1$ $(i=r$のとき$)$、$\lambda_i=0(i\neq r)$ が言える。

式 (6) と式 (10) により、対数 Kriging による最適推定値は次式で与えられる。

$$\widehat{W}_K(X_r)=\exp\left[\left\{\ln m(X_r)-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\ln m(X_i)\right\}+\widehat{W}_e(X_r)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\Big(\sigma_e{}^2(X_i)-C_e(W(X_i),W(X_r))\Big)\right] \tag{11}$$

一方、Kriging の誤差分散は、式 (9) と式 (10) より、次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_K{}^2(X_r) &= m(X_r)^2 e^{\sigma_e{}^2(X_r)}\left(1-e^{-\sigma_{K_e}{}^2(X_r)}\right) \\ \text{ただし、}\quad \sigma_{K_e}{}^2(X_r) &= \sigma_e{}^2(X_r)-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i C_e(W(X_i),W(X_r)) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Kriging による最適推定値 (式 (11)) は、多次元対数正規確率密度関数から求められる条件付平均値と完全に一致する。しかし、条件付分散と Kriging による推定誤差分散は異なる値となる。これは、非正規性および非線形性により、直交性が成り立たないためである。結果のみ記すと、条件付分散は次式で表せる。

$$\overline{\sigma}_K{}^2(X_r) = \sigma^2(W(X_r)/cond) = \widehat{W}_K(X_r)^2\left(e^{\sigma_{K_e}{}^2(X_r)}-1\right) \tag{13}$$

上式の$\widehat{W}_K(X_r)$ は条件付平均値 $E[W(X_r)/cond]$ と完全に等しい。

4. 条件付シミュレーション

N 地点の観測値から、未観測点 X_rのサンプル場は、式 (11) の平均値と式 (13) の分散を有する対数正規分布のシミュレーションを実施すれば、得られる。すなわち、標準正規乱数 R を独立に発生させれば、次式によって、サンプル実現値$\underline{\widehat{W}}(X_r)$ を求めることができる。

$$\left.\begin{aligned} \underline{\widehat{W}}(X_r) &= \exp\left(\ln\widehat{W}_K(X_r)-\tfrac{1}{2}A(X_r)^2+A(X_r)\cdot R\right) \\ \text{ただし、}\quad A(X_r) &= \sqrt{\ln\left\{1+\left(\frac{\overline{\sigma}_K(X_r)}{\widehat{W}_K(X_r)}\right)^2\right\}} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

複数の未観測点におけるサンプル場を得るには、文献 1) の漸次拡張方式を適用すればよい。すなわち、式 (14) で得られたサンプル値を既知の観測データに追加し、合計 (N+1) 地点の観測データが得られていると考える。これより、未観測点 X_s上で、$\underline{\widehat{W}}(X_s)$ をシミュレートするのである。つまり、順次一つずつ未観測点の数を増やすことにより、式 (14) を用いて、複数の未観測地点でのサンプル場を求めることができる。

ここでは、漸次拡張方式を用いるとき、次の漸化関係を利用して、X_{N+m+1} $(m=0,1,2,\cdots)$ 地点の重み係数$\Lambda_{N+m}(=\{\lambda_1(X_{N+m+1})\cdots\lambda_{N+m}(X_{N+m+1})\}^T)$ を求めることを提案する。

$$\Lambda_{N+m}(X_{N+m+1}) = \Sigma_{N+m}^{-1}S_{N+m}(X_{N+m+1}) \quad (m=0,1,2,\cdots) \tag{15}$$

$$\text{ここに、}\left.\begin{aligned} \Sigma_{N+m+1}^{-1} &= \begin{bmatrix} \Sigma_{N+m}^{-1}+P_{N+m}Q_{N+m}^{-1}P_{N+m}^T & -P_{N+m}Q_{N+m}^{-1} \\ -Q_{N+m}^{-1}P_{N+m}^T & Q_{N+m}^{-1} \end{bmatrix} \\ P_{N+m} &= \Sigma_{N+m}^{-1}A_{N+m} \\ Q_{N+m} &= B_{N+m}-P_{N+m}^T A_{N+m} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

ただし、ベクトル$S_N(X_{N+1})$の成分は$C_e(W(X_i),W(X_{N+1}))$ $(i=1\sim N)$、行列Σ_Nの成分は$C_e(W(X_i),W(X_j))$ $(i,j=1\sim N)$、ベクトルA_Nの成分は$C_e(W(X_{N+1}),W(X_i))$ $(i=1\sim N)$ および B_Nは$C_e(W(X_{N+1}),W(X_{N+1}))$ である。

式 (15) を用いることにより、条件付シミュレーションを効率的に実施することができる。

5. あとがき

本小文では、対数正規確率場を例題に採用して、非線形の条件付推定理論および効率的な条件付シミュレーション理論を提案した。非正規確率場において、1)Kriging による最適推定値は条件付平均値に等しいが、2)Kriging による最小誤差分散は条件付分散とは異なることや 3) 条件付シミュレーションには誤差分散が関与しないことなど、新たな知見が得られた。

参考文献

1) 星谷　勝: 条件付確率場のシミュレーション理論，土木学会論文集，No.459/I-22, pp.113 ～ 118, 1993 年 1 月.