I－416 条件付き確率場の補間理論における最尤推定法とKalman Filterについての基礎考察

武蔵工業大学 正会員 丸山 収

1．はじめに

条件付き確率場の補間理論では、対象としている現象の観測情報を用いることから、無条件確率場の理論に比べて、詳細な現象把握が可能となる[1,2,3]。ここでは、最尤推定法の考え方から、文献(1)で定式化した誤差共分散を用いる方式および誤差共分散を用いる漸次拡張方式が、条件付き確率場の理論解から得られる補間理論を与えていることを再度確認している[2]。その際、観測されるｻﾝﾌﾟﾙ場が観測ﾉｲｽﾞを含む場合にも適用可能となる様にしている。また、ｶﾞｳｽ・ﾏﾙｺﾌ性確率場の最尤推定法について概観し、最尤推定法の考え方から、Kalman Filterの考察を行っている。また、Kalman Filterによる補間について簡単に示している。

2．条件付き確率と最尤推定法

確率場Z(X)において式(1)に示す様にZXrおよびZXを考える。

$$\mathbf{ZXr}=[Z(Xrm)\ Z(Xrm\text{-}1)\cdots Z(Xr1)]\quad (a),\quad \mathbf{ZX}=[Z(Xn)\ Z(Xn\text{-}1)\cdots Z(X1)]\quad (b) \qquad (1)$$

ここで、Xri,(i=1,2,…,m)およびXi',(i'=1,2,…,n)は確率場の座標ﾍﾞｸﾄﾙを示している。

さて確率場；Z(X)の相互相関関数；C(Z(X), Z(X'))および期待値E［Z(X)］=m(X)が推定されており、既知量として扱えるものとする。その際、式(1)は確率場；WZを用いて次式の様に表現することができるものとする。

$$\mathbf{Z}=\mu\mathbf{Z}+\mathbf{WZ}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{ZX}\\ \hdashline \mathbf{ZXr}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu\mathbf{Zx}\\ \hdashline \mu\mathbf{Zxr}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{WZx}\\ \hdashline \mathbf{WZxr}\end{bmatrix}\quad (2),$$

ここで、
$$\mu\mathbf{Zx}^T=[m(Xn)\ m(Xn\text{-}1),\cdots,m(X1)]$$
$$\mu\mathbf{Zxr}^T=[m(Xrm)\ m(Xrm\text{-}1),\cdots,m(Xr1)]$$
$$\mathbf{WZx}^T=[W(Xn)\ W(Xn\text{-}1),\cdots,W(X1)]$$
$$\mathbf{WZxr}^T=[W(Xrm)\ W(Xrm\text{-}1),\cdots,W(Xr1)]$$

次に、確率場の座標ﾍﾞｸﾄﾙ［Xn Xn-1 Xn-2…X1］において、確率場Y(Xi);(i=1,2,…,n)が測定されているものとする。また、測定により得られる確率場；Y(Xi)は、Zに関する線形関係式で与えられるものと仮定する。

$$\mathbf{Y}=\mathbf{g}\,\mathbf{Z}+\boldsymbol{\omega} \qquad (3)$$

ここで$\mathbf{g}$は観測に伴う既知定数ﾏﾄﾘｯｸｽである。また、$\boldsymbol{\omega}$は観測ﾉｲｽﾞに関する確率場であり、その平均値および相互相関関数は既知であるとする。式(2)および式(3)の基で、確率場；$\mathbf{Y}=[Y(Xn)\ Y(Xn\text{-}1)\cdots Y(X1)]$のｻﾝﾌﾟﾙ実現値が観測されているときに、確率場；$\mathbf{Z}^T=[\mathbf{ZX}^T\ \mathbf{ZXr}^T]$を推定することを考える。ここで確率場の座標ﾍﾞｸﾄﾙ；Xi(i=1,2,…,n)ではｽﾑｰｼﾞﾝｸﾞ(観測ﾉｲｽﾞの除去)、座標ﾍﾞｸﾄﾙ；Xri'(i'=1,2,…,m)では推定または補間することとなる。その際、確率場；Zの相互相関関数が既知であり、Yが与えられた条件の基で条件付き確率密度関数；P(Z/Y)を最大とするようなZを求めることを考える。P(Z/Y)を最大とすることは、測定により得られた確率場；Yに対して最も尤度の高いZを求めることになる。

さて、対象とする確率場において座標ﾍﾞｸﾄﾙ；Xに関する順序(因果律)が意味のないものとすれば、Yが生起した条件のもとでZが生起する確率；P(Z/Y)は、ﾍﾞｲｽﾞの定理より次式で表現される。

$$\begin{aligned}P(\mathbf{Z}/\mathbf{Y})=&P(Z(Xrm)/Z(Xrm\text{-}1),\cdots,Z(Xr1),\mathbf{ZX},\mathbf{Y})\times P(Z(Xrm\text{-}1)/Z(Xrm\text{-}2),\cdots,Z(Xr1),\mathbf{ZX},\mathbf{Y})\\ &\cdots\times P(Z(Xn)/Z(Xn\text{-}1),\cdots,Z(X1),\mathbf{Y})\times\cdots\times P(Z(X2)/Z(X1),\mathbf{Y})\times P(Z(X1)/\mathbf{Y})\end{aligned} \qquad (4)$$

$P(\mathbf{Z}/\mathbf{Y})_{max}$とするためには複数のｱﾌﾟﾛｰﾁが考えられる。直接$P(\mathbf{Z}/\mathbf{Y})_{max}$とすることを考えれば、Zを同時にｼﾐｭﾚｰﾄする定式化が得られる。また式(4)によれば$P(Z(X1)/\mathbf{Y})_{max}$、$P(Z(X2)/Z(X1),\mathbf{Y})_{max}$として順次ｼﾐｭﾚｰﾄされる確率場を取り込みながら未知確率場を推定する定式化が得られる。詳細は文献(1)に委ねるが、星谷は最小誤差分散不偏推定法により、直接$P(\mathbf{Z}/\mathbf{Y})_{max}$を求める定式化として誤差共分散を用いる方式を示し、式(4)に対応して誤差共分散を用いる漸次拡張方式の定式化を行っている。一方文献(3)では、漸次拡張方式により対象とする現象の時間方向の因果律を考慮した補間理論を展開している。また式(4)の様な展開は複数存在し、ｼﾐｭﾚｰﾄされる確率場は、いずれの展開を用いても、対象とする現象の因果律を満足していれば、ｼﾐｭﾚｰﾄする順序に依存しないことがわかる。$P(\mathbf{Z}/\mathbf{Y})_{max}$は、具体的に確率密度関数が与えられることにより解くことができる。例えば、確率場；Zおよび$\boldsymbol{\omega}$の特性がｶﾞｳｽ分布として与えられ、特に$\boldsymbol{\omega}$がｶﾞｳｽ白色雑音の場合には次式を得る。

$$\hat{W}Z=(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{g}^{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{g})^{-1}\mathbf{g}^{T}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{Y}-\mu Y)) \quad (5), \qquad \hat{Z}=\mu Z+\hat{W}Z \quad (6)$$

ここで、$\mathbf{C}$は確率場$Z(X)$, $Z(X')$の相互相関関数を成分とするﾏﾄﾘｯｸｽであり、E $[\omega\omega^{T}]=\mathbf{R}$である。式(5)では$\hat{Z}$（または$\hat{W}Z$）は、結果として観測値に関する線形補間式として与えられる。これはｶﾞｳｽ分布を対象とした最小誤差分散不偏推定と同一の結果を与えている。以上の結果はｶﾞｳｽ確率密度関数が2次までの確率ﾓｰﾒﾝﾄにより規定されることおよび最小誤差分散不偏推定の評価関数と条件付き確率密度関数を最大とする評価関数が一致することが要因となっている。ここで、実際にｼﾐｭﾚｰﾄされる確率場は、推定誤差$\varepsilon=WZ-\hat{W}Z$の平均値および分散を評価することにより、$\underline{\hat{Z}}^{*}=\mu Z+WZ+\underline{\varepsilon}^{*}$として与えられる。以上では確率場の特性を、相互相関関数に規定する考え方について概観した。

３．ｶﾞｳｽ・ﾏﾙｺﾌ性確率場の最尤推定とKalman Filter[4)]

ここでは、ｶﾞｳｽ・ﾏﾙｺﾌ性確率場の最尤推定を試みる。そして確率場の特性として相互相関関数を規定する代わりに、確率微分方程式によりｶﾞｳｽ・ﾏﾙｺﾌ性確率場の特性を規定する最尤推定がKalman Filterとなることを確認している[4)]。そしてKalman Filterによる補間について簡単に示している。ここで問題を平易に理解するために、確率場の座標ﾍﾞｸﾄﾙ;Xを時間方向の座標ﾍﾞｸﾄﾙ;tとして時間方向1次元の現象を対象とする。そして、式(7)に示す様な1階の確率常微分方程式を考える。

$$\dot{Z}(t)=-AZ(t)+B\omega(t) \qquad (7)$$

ここで、AおよびBは既知定数ﾏﾄﾘｯｸｽとする。$\omega(t)$は平均値0,分散1のｶﾞｳｽ白色雑音と仮定する。式(7)の解は、次式で与えられる。

$$Z(t)=\exp(-A(t-\tau))Z(\tau)+\int_{\tau}^{t}\exp[-A(t-\tau')]B\omega(\tau')d\tau' \qquad (8)$$

式(8)は$Z(\bullet)$に関する線形関係の式である。また$Z(t)$は、時間方向に$t-\tau$遡った$Z(\tau)$のみに依存する確率場(過程)であり、1次のﾏﾙｺﾌ過程となっている。ここで、測定に関する時間方向の因果律を考慮すれば、式(4)に対応する条件付き確率密度関数は、次式の様になる。

$$\begin{aligned}P(\mathbf{Z}/\mathbf{Y})=&P(Z(tn)/Z(tn-1),\cdots,Z(t1),\mathbf{Y})\times P(Z(tn-1)/Z(tn-2),\cdots,Z(t1),\mathbf{Y})\\&\cdots\times P(Z(tj)/Z(tj-1),\cdots,Z(t1),\mathbf{Y})\times\cdots\times P(Z(t2)/Z(t1),\mathbf{Y})\times P(Z(t1)/\mathbf{Y})\\=&P(Z(tn)/Y(tn),Z(tn-1))\times P(Z(tn-1)/Y(tn-1),Z(tn-2))\\&\cdots\times P(Z(tj)/Y(tj),Z(tj-1))\times\cdots\times P(Z(t2)/Y(t2),Z(t1))\times P(Z(t1)/Y(t1))\end{aligned} \qquad (9)$$

ここで、時間方向の座標ﾍﾞｸﾄﾙ; $\mathbf{t}=[tn,\ tn-1,\cdots,tj,\cdots,t1]$であり、$tj>tj-1$の関係がある。

Kalman Filterのｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑは、これらの設定条件の基で式(9)に示すﾏﾙｺﾌ過程の条件付き確率密度関数の尤度を最大とするものとして与えられる。初期条件は、$P(Z(t1)/Y(t1))_{max}$を求めることで与えられる。そして$P(Z(tj)/Y(tj),Z(tj-1))_{max}$;$(i=2,3,\cdots,n)$を求めることをしているが、計算を2段階に分けて行っている。すなわち、時刻;$tj-1$までの観測情報を用いて、時刻;tjにおける確率場;$Z(tj/tj-1)$を求める。次に、$Y(tj)$が得られた条件の基で確率場;$Z(tj/tj)$を求めている。具体的には第一段階で、$P(Z(tj/tj-1)/Z(tj-1/tj-1)))_{max}$を計算し、第二段階で、$P(Z(tj/tj)/Y(tj),Z(tj/tj-1)))_{max}$を求めるｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑとなっている。その際、式(7)および予め設定した$\omega(t)$の白色性から、第一段階における条件付き平均値および条件付き分散値の更新が自動的に行える様になっている。すなわち、式(8)より$E[Z(tj/tj-1)]cond.$が与えられ、また式(8)より条件付き分散値;$E\ [Z(tj/tj-1)^{2}]$を、それぞれ漸化式で求めることができる。そして$\hat{Z}(tj/tj)=\hat{Z}(tj)$(ｽﾑｰｼﾞﾝｸﾞ)となるが、時間;$tj$において測定が行われなければ、$\hat{Z}(tj/tj-1)=\hat{Z}(tj)$(推定または補間)となる。また実際にｼﾐｭﾚｰﾄされる確率場は、推定誤差を考慮することが必要となる。以上では、確率場の特性を確率微分方程式により与え、最尤推定を試みることからKalman Filterについて考察した。

ここで、紙面の都合上要点のみを示す。式(7)におけるAが時変係数となれば、非定常性の確率場へと拡張される。またAも確率量とすれば、厳密にはｶﾞｳｽ確率場の条件を満たさなくなるが、拡張Kalman Filterにより近似ﾌｨﾙﾀが与えられている。式(8)より、具体的な離散化計算の精度は指数関数exp(A)の展開精度に依存することが推察される。なお、時空間場の補間理論への展開については講演時に示す。

参考文献;(1)星谷;土論集(No.459/I-22,pp.113-118),(2)星谷、桑名;(土論集ﾉｰﾄ投稿中1992/10),(3).丸山,星谷,山口(土論集投稿中1993/2),(4)有本;ｶﾙﾏﾝﾌｨﾙﾀ,産業図書