

任意形曲線橋の自由振動の解析法

大日本コンサルタント 正 員 ○ 川神雅秀
 長崎大学 工学部 正 員 崎山 毅
 長崎大学 工学部 正 員 松田 浩
 長崎大学 工学部 正 員 森田千尋

1. まえがき

本研究は、多径間連続曲線橋の動的、又は衝撃応答性状に及ぼす支承構造の影響に関する基礎的研究の一環として、種々の曲線形状を有する曲線橋の自由振動の解析法について考究したものである。本文では、解析精度とパラメーター解析に対する有効な解析法として、積分方程式に等間隔の数値積分を適用する手法を提示するが、この際、固有値計算は試行錯誤法の煩雑さを回避するため変位のグリーン関数を導入し標準型の固有値問題としての解析を行なった。

2. 曲線梁の自由振動方程式

曲線梁の面内・面外問題に関する自由振動方程式は、変位のグリーン関数を使用することで、次の連立積分方程式として与えられる。

(面内振動)

$$\frac{u(\eta a)}{\lambda^4} = \int_0^1 \bar{A}(\eta) u \bar{u} d\eta + \int_0^1 \bar{A}(\eta) w \bar{w} d\eta + \int_0^1 F(\eta) \theta_z \bar{\theta}_z d\eta - (1)$$

$$\frac{w(\eta a)}{\lambda^4} = \int_0^1 \bar{A}(\eta) u \bar{u} d\eta + \int_0^1 \bar{A}(\eta) w \bar{w} d\eta + \int_0^1 F(\eta) \theta_z \bar{\theta}_z d\eta - (2)$$

$$\frac{\theta_z(\eta a)}{\lambda^4} = \int_0^1 \bar{A}(\eta) u \bar{u} d\eta + \int_0^1 \bar{A}(\eta) w \bar{w} d\eta + \int_0^1 F(\eta) \theta_z \bar{\theta}_z d\eta - (3)$$

ここに、 θ , w , u は軸接線回転角、接線方向変位、法線方向変位を各々示す。また、 I , A , E , ℓ はそれぞれ部材の断面二次モーメント、断面積、弾性定数、梁の全長であり、 ρ , ω は単位体積質量、固有円振動数を、 λ は振動数パラメーターを示す。

$$\lambda^4 = \frac{\rho A_0 \omega^2 \ell^4}{EI z_0}, \quad \eta = \frac{S}{\ell}, \quad \bar{A}(\eta) = \frac{A(\eta)}{A_0}, \quad F(\eta) = \frac{\bar{I}_z(\eta) \ell}{a z^2}$$

(面外振動)

$$\frac{v(\eta a)}{\lambda^4} = \int_0^1 \bar{A}(\eta) v \bar{v} d\eta + \int_0^1 K(\eta) \phi_x \bar{\phi}_x d\eta - (4)$$

$$\frac{\phi_x(\eta a)}{\lambda^4} = \int_0^1 \bar{A}(\eta) v \bar{v} d\eta + \int_0^1 K(\eta) \phi_x \bar{\phi}_x d\eta - (5)$$

ここに、 v , ϕ は鉛直変位、ねじり角を、 I_p は極断面二次モーメントを示す。

$$\lambda^4 = \frac{\rho A_0 \omega^2 \ell^4}{EI y_0}, \quad K(\eta) = \frac{\bar{I}_p(\eta) \ell}{b x^2}, \quad \bar{I}_p(\eta) = \frac{I_p(\eta)}{I_{p0}}$$

これらの連立積分方程式の解を解析的に求めることは不可能であると判断されるゆえ、本文では等間隔の数値積分法を適用し、変換した変数係数連立方程式の係数行列式をゼロとする固有値問題として解析した。ここに、離散的な変位のグリーン関数を使用することで、係数行列式の対角要素に振動数パラメーター(λ)を含む標準型の固有値解析が可能となる。解析法の詳細は、文献(1)を参照されたい。

3. 離散化グリーン関数の誘導

グリーン関数は、構造力学的には単位荷重による影響線関数である。本文では任意の曲線形状を軸線とする変断面曲線梁の、面内問題に対する離散化グリーン関数の導出過程を示した。一般に、曲線梁の軸線形状に任意性を保持したまま静的な面内・面外問題の連立基礎微分方程式の一般解を解析的に求めることは困難である。このため本解析では、自由振動方程式と同様に、連立基礎微分方程式を連立積分方程式に変換し、これに等間隔の数値積分を適用することで離散化グリーン関数を誘導した。ここでは面内問題の法線方向に単位集中荷重が作用する場合についての導出概要を示す。解析法の詳細は、文献(1)を参照されたい。

$$\bar{X}_1 = -\frac{\ell^2 \bar{Q}_y}{EI z_0}, \quad \bar{X}_2 = -\frac{\ell^2 \bar{N}_x}{EI z_0}, \quad \bar{X}_3 = -\frac{\ell \bar{M}_z}{EI z_0}, \quad \bar{X}_4 = \bar{\theta}_z, \quad \bar{X}_5 = \frac{w}{\ell}, \quad \bar{X}_6 = \frac{u}{\ell}, \quad \eta = \frac{S}{\ell}, \quad a_0 = \frac{a}{\ell}, \quad r(\eta) = \frac{\ell}{R(\eta)}$$

$\bar{I}_z = \frac{I_z(\eta)}{I_{z0}}, \quad \bar{A} = \frac{A(\eta)}{A_0}, \quad a z^2 = \frac{A_0}{I_{z0}} \ell^2$ なる無次元量 $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_6$ を導入し、基礎微分方程式を変形すると単位集中荷重が法線方向に作用した場合の基礎微分方程式は次式となる。

$$\frac{d\bar{X}_p}{d\eta} = \sum_{k=1}^6 G_{pk} \bar{X}_k + P_{y0} \frac{\ell^2}{EI z_0} \delta(\eta - a_0) \delta_{1p} - (6)$$

($p=1 \sim 6, k=0, 1, \dots, i, \dots, m$)

ここに P_{y0} 法線方向単位集中荷重を、 Q , N , M はそれぞれ、せん断力、軸力、曲げモーメントである。

δ_{1p} : Kronecker delta function, $\delta(\eta - a_0)$: Dirac delta function

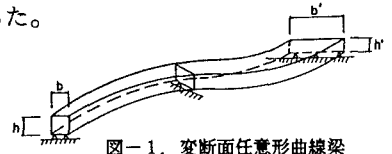


図-1. 変断面任意形曲線梁

軸上の無次元変数 ξ の原点を部材左端にとり、基礎微分方程式 (6) を変域 $[0, \eta]$ で積分方程式に変換する。

$$\bar{X}_p(\eta) = \bar{X}_p(0) + \int_0^\eta \sum_{k=1}^8 G_{pk}(\xi) \bar{X}_k(\xi) d\xi + \int_0^\eta P_{y0} \frac{\ell^2}{EIz_0} \delta(\xi - a_0) \delta_{1p} d\xi \quad (7)$$

次に全変域 $[0, 1]$ の梁軸を m 等分し、左側等分点より順に 0, 1, 2, ..., m なる番号をつけ、積分方程式に等間隔の数値積分手法を繰り返し適用し、左側等分点より順に解を求めると任意点 i における離散化グリーン関数は次式となる。

$$\bar{X}_{pi} = \sum_{d=1}^6 a_{pid} \bar{X}_{do} + Q_{pi} \quad (8)$$

$$a_{pid} = \sum_{t=1}^6 \gamma_{pt} a_{tod} + \sum_{t=1}^6 \sum_{k=0}^{1-1} \beta_{ik} B_{pt} a_{tkd} \quad \beta_{ik} : \text{Simpsonの重み係数}$$

$$Q_{pid} = \sum_{t=1}^6 \gamma_{pt} Q_{tod} + \sum_{t=1}^6 \sum_{k=0}^{1-1} \beta_{ik} B_{pt} Q_{tkd} + \frac{P_{y0} \ell^2}{EIz_0} \gamma_{pi} U(i - a_0)$$

4. 数値解析

表-1 は、数値積分の分割数による解の精度について、他の解析法との比較結果を示す。

表-2 は、クロソイド曲線を有する変断面曲線橋の解析結果を FEM による結果と比較したものである。本解析法は、比較的粗い分割数で実用に支障のない解析結果が得られること、さらに入力作業が簡便である等の有利性を持つ。

図-3 は、円弧形単純支持曲線梁の面外自由振動特性を、中心角と換算ねじり剛性と曲げ剛性比をパラメーターとして示したものである。

図-4 は、クロソイド曲線を有する曲線橋の自由振動特性をクロソイドパラメーターにより検討したものである。以上、著者等が導出した解析法を利用して解析した曲線橋の自由振動特性の一部を報告した。

表-1. 円弧形曲線梁の振動数パラメーターと解の収束性

		In-plane				Out-of-plane					
		$u=0$ $w=0$ $M_x=0$	30	60	90	Ref. 2)	$v=0$ $\phi=0$ $M_y=0$	30	60	90	Ref. 3)
1st	present method	30	6.0750	6.0733	6.0714	6.0725	30	2.8172	2.8167	2.8166	2.8170
		60	—	6.0810	6.0712			—	2.8167	2.8166	
	FEM			6.0724				2.8227			
2nd	present method	30	9.0266	9.0249	9.0166	—	30	6.1124	6.1080	6.0166	6.1121
		60	—	9.0276	9.0220			—	6.1081	6.0220	
	FEM			9.0244				6.0683			
3rd	present method	30	12.4863	12.4611	12.4416	12.4582	30	9.3098	9.2933	9.2918	9.3096
		60	—	12.4563	12.4483			—	9.2916	9.2942	
	FEM			12.4604				9.3263			
Specifications		Total arc angle $\frac{\pi}{3}$, $a=200$, $\frac{GJ}{EI}=0.5$, $\ell=1, 0$									

【参考文献】

- 1) 川神雅秀, 崎山毅他: 離散化グリーン関数による平面骨組構造物の自由振動解析, 境界要素法論文集, 第9巻, PP.85-90, 1992.
- 2) V. V. BOLOTIN: The dynamic stability of elastic systems, Holden-Day, Inc, 308, 1964.
- 3) Tan, C. Pand shore, S: Dynamic response of a horizontally curved bridge, Proc. of ASCE, Vol. 94, No. ST3, PP701-781, 1968.

図-2. 曲線梁軸上の等分割点

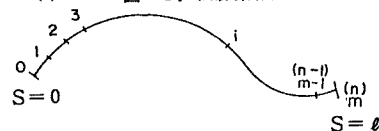


表-2. 変断面クロソイド曲線梁の振動数パラメーター

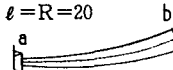
mode		shape of curved beam			cross-section 	
K : shear coefficient			In-plane		Out-of-plane	
			K=0	K=3/2	K=0	K=3/2
1st	present method		5.398	5.383	3.076	3.070
	FEM (n=40)		5.399	—	3.057	—
2nd	present method		6.510	6.473	6.244	6.196
	FEM (n=40)		6.501	—	6.203	—
3rd	present method		9.429	9.269	9.408	9.247
	FEM (n=40)		9.405	—	9.375	—
Boundary Condition			u = W = M _x = 0		V = φ _x = M _y = M _w = 0	

図-3. 円弧形曲線梁の自由振動特性

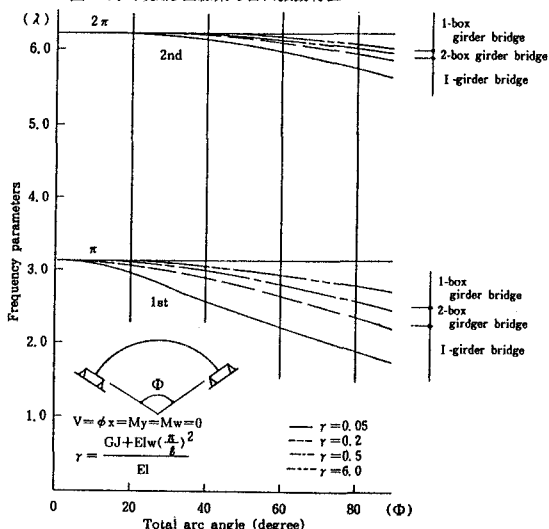


図-4. クロソイド曲線梁の自由振動特性

