Ｉ－192　確率論に基づく逆解析と予測解析

東電設計（株）　正会員　吉田郁政　　正会員　井出周治
正会員　伊藤利昭

1．まえがき　確率論に基づく逆解析では、推定値に対する信頼性を共分散マトリックスという形で求めることができる。この共分散マトリックスを調べることにより、逆解析によってどの程度パラメタを推定できるかが議論でき、たいへん有益な情報である。また、この共分散マトリックスについて誤差伝播の法則を適用すると、順解析結果の共分散マトリックスも評価できる。従って、ここで提案する手法を用いて逆解析、順解析を行うことにより、1)事前情報に基づくモデルによる予測解析、2)観測情報によるモデルの改良（逆解析）、3)改良したモデルによる予測解析、という一連の検討の信頼性を合理的に評価することができる。

2．確率論に基づく逆解析[1)]　逆解析のための目的関数を最尤法に基づいて誘導すると、次式が求められる。

$$J_4 = \{(x - x_o)^T M^{-1}(x - x_o) + (z - H(x))^T R^{-1}(z - H(x))\}/2 \tag{1}$$

ここに、x：逆解析の対象となるパラメタのベクトル、z：観測量ベクトル、M：事前のxの共分散マトリックス、x_o：事前のxの平均値、R：観測量誤差の共分散マトリックス、H（x）：計算推定値

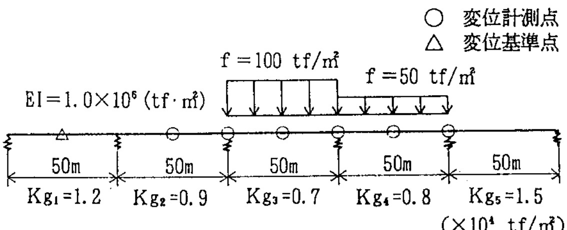
事前とは観測量が与えられる前の意味であり、事後とは観測量が与えられた後を意味することとする。xについての事前の平均、共分散はx_o、Mであり、事後の平均、共分散は、次式に関して収束計算することにより求められる。これらの式は、J_4の最小化の条件から誘導することができ、非線形最小二乗法の Gauss-Newton 法と等しい。

$$x_{i+1} = x_i + P_{xi}\{H_{xi}^T R^{-1}(z - H(x_i)) + M^{-1}(x_o - x_i)\} \tag{2}$$

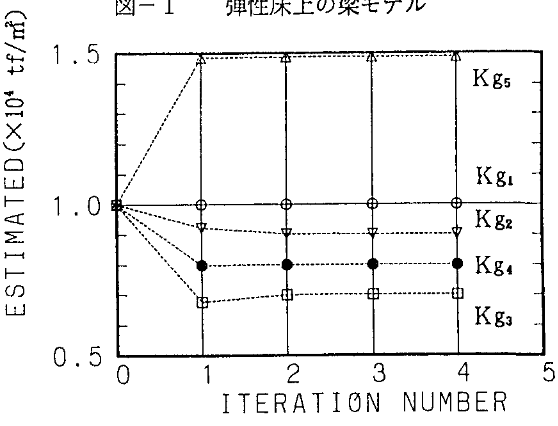
$$P_{xi} = (M^{-1} + H_{xi}^T R^{-1} H_{xi})^{-1} \tag{3}$$

ここに、P_{xi}：xに関する事後の共分散マトリックス、　H_{xi}：x_iにおける$\partial H/\partial x$

3．逆解析の適用例　図－１に示す例題について、地盤ばねKg₁～Kg₅を未知量とする逆解析を行った。観測量は図－１に示した計測点と基準点の相対変位であり、逆解析に先だって真値に基づく順解析を行って求めた。これを図－３（真の変位分布）に示す。事前情報x_o、Mは平均値が全て1.0×10^4 tf/m²、地盤ばね間に相関はなく標準偏差が1.0×10^4 tf/m²であるとした。また、観測量誤差の標準偏差は0.1mmとした。式(2),(3)による地盤ばねの収束過程を図－２に示す。また、事前、事後の地盤ばね推定値の平均、標準偏差の変化を表－１に示す。Kg_2～Kg_5は観測情報を与えることで標準偏差が小さくなり信頼性が向上しているが、Kg_1はかわりがない。平均値もKg_2～Kg_5はほぼ真値に近い値となっているがKg_1は初期値から動いていない。事前情報にまったく信頼がおけない、すなわちM^{-1}=0とおくと観測情報だけに基づく逆解析となるが、Kg_1のように観測情報に対して感度が小さいパラメタがあると、式(3) が非正則となり解が求められない、あるいは悪条件となり解が不安定



図－１　弾性床上の梁モデル



図－２　地盤ばねの収束過程

になる。Marquardt 法などを用いて正則化すれば一応解は求まるがその場合の解に明解な意味はない。一方、$M^{-1}=0$とはせずになんらかの事前情報を与えておけば安定して解が得られ、最尤法に基づく解という明解さがあり、よい性質を持った解法となる。

表－１　地盤ばね定数の平均値と標準偏差

	Kg_1	Kg_2	Kg_3	Kg_4	Kg_5
事前	1.0 (1.0)	1.0 (1.0)	1.0 (1.0)	1.0 (1.0)	1.0 (1.0)
事後	1.0 (1.0)	0.9 (0.0611)	0.7 (0.00463)	0.8 (0.0109)	1.49 (0.171)

（　）内は、標準偏差。　単位；$\times 10^4 tf/m^2$

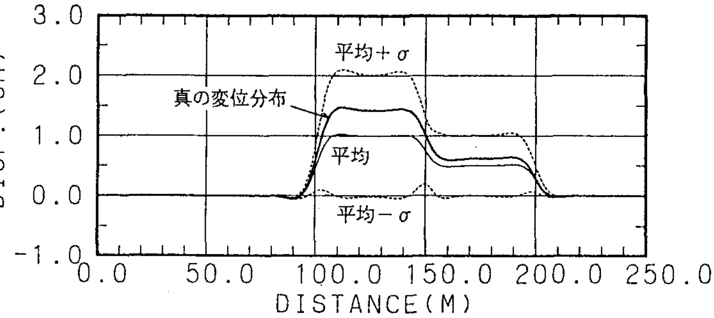
４．予測解析の適用例　剛性マトリックスＫと外力ベクトルｆが与えられると変位ｕは$u=K^{-1}f$で与えられる。例題に示したモデルについて地盤ばねや外力が共分散マトリックスＰに従う確率変数とすると変位ｕも確率変数となり、その平均u_o、共分散マトリックスＱ は近似的に次式で与えられる。

$u_o=K_o f_o$　　(4)、　$Q=APA^T$　　(5)

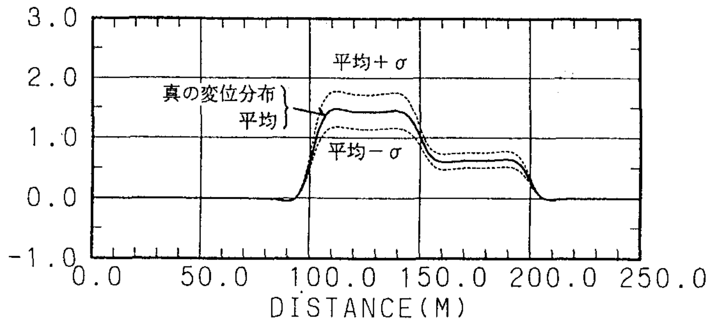
ここに、$A=\partial u/\partial x$、K_o：地盤ばねの平均値から作られる剛性マトリックス、f_o：外力の平均

これらの式は、ｕについてｘに関するテーラー展開を行い、２次以降の項を無視することにより導くことができ、式(5) は誤差伝播の式[2]として知られている。また、この式は確率有限要素法の１次摂動法[3]と一致する。例題について、事前情報を用いた確率的予測解析を行なった結果の変位図を図－３に、逆解析によって改良したモデルによる同様の変位図を図－４に示す。これらの予測解析では外力も変動係数20%の確率変数とした。図－３では変位の平均±標準偏差σの範囲が広いのに対して、図－４では逆解析を行うことにより地盤ばねの信頼性が向上し、平均±σの範囲が狭くなっていることがわかる。また、推定変位の平均値については、図－３では真の変位とずれがあるが、図－４では、逆解析により推定されたKg_2～Kg_5が真の値とほぼ一致しているため、Kg_1が真の値と一致していないにも関わらず、真の変位分布と一致している。

なお、式(4)、(5)は変動が微小であるという仮定の上で誘導されている。従って図－３のように分散が大きい場合の定量的評価には注意を要する。



図－３　事前情報を用いたモデルによる推定変位



図－４　逆解析によって改良されたモデルによる推定変位

参考文献

1) 黒瀬、他：確率論に基づく逆解析手法の基礎的考察、土木学会年次学術講演会（第Ｉ部門掲載予定）、1993
2) 中川、他：最小二乗法による実験データ解析、東京大学出版会、1982
3) 中桐、他：確率有限要素法入門，培風館，1985