

I-191 確率論に基づく逆解析手法の基礎的考察

東電設計(株) 正会員 黒瀬浩公
 東電設計(株) 正会員 吉田郁政
 東電設計(株) 正会員 福井史朗

1. はじめに

近年、施工中の地盤や構造物の挙動について様々な計測が行われ、その計測データから逆解析を行って現在の状況を把握し、次のステップの施工を管理する情報化施工の開発が盛んである。中でも逆解析はその中核をなすものであり、様々な手法が用いられている。ここでは静的な逆問題について最尤法により確率論的に解く逆解析手法を誘導し、EK-WGI¹⁾法との比較を行った。

2. 最尤推定に基づく逆解析手法

まず、観測量を表す式が推定したいパラメータに対して線形である場合を考える。

計測が行われる以前の状態量 $\mathbf{x}$ (n 次) に対して統計的性質が与えられているものとする。

$$E[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T] = \mathbf{M} \quad (1)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{x}}$: 平均値, $\mathbf{M}$: 共分散マトリックスである。

さらに、次の条件式(観測) $\mathbf{z}$ (m 次) が与えられたとする。

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{H}$: ($m \times n$) の既知行列

$\mathbf{v}$: 誤差ベクトル

$$E[\mathbf{v}] = \mathbf{0}, E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] = \mathbf{R}$$

ここで、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{v}$ は無相関で、それぞれガウス分布に従うと仮定する。

この時の最も合理的な推定値は、条件付き確率 $P(\mathbf{x}/\mathbf{z})$ を最大にする最尤推定値 $\mathbf{x}$ と考える。

この条件付き確率はベイズの公式より次のように表される。

$$P(\mathbf{x}/\mathbf{z}) = P(\mathbf{z}/\mathbf{x}) \cdot P(\mathbf{x}) / P(\mathbf{z}) \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{z}$ の共分散を $\mathbf{R}$ とすると、

$$P(\mathbf{z}/\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})\right\} \quad (4)$$

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{M}|^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right\} \quad (5)$$

$$P(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}|^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}})\right\} \quad (6)$$

となり、 $P(\mathbf{x}/\mathbf{z})$ が求められる。

$$P(\mathbf{x}/\mathbf{z}) = \frac{|\mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{M}|^{1/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \times \exp\{-\mathbf{J}_2 + \mathbf{I}\} \quad (7)$$

ここに、

$$\mathbf{J}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}) \quad (8)$$

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}) \quad (9)$$

$\mathbf{x}$ の関数となるのは $\mathbf{J}_2$ だけなので、 $P(\mathbf{x}/\mathbf{z})$ を最大にする $\mathbf{x}$ は $\mathbf{J}_2$ を最小にすることが分かり、これが目的関数となる。

観測を表す式が式(10)のように非線形の場合も同様に目的関数 $\mathbf{J}_4$ が誘導できる。

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \quad (10)$$

$$\mathbf{J}_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x})) \quad (11)$$

この非線形の目的関数の最小値を与える $\mathbf{x}$ を求めるには、最適化手法が必要となる。ガウスニュートン法による推定式は

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{P}_{x_i} \{ \mathbf{H}_{x_i}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_i)) + \mathbf{M}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_i) \} \quad (12)$$

$$\mathbf{P}_{x_i} = (\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{H}_{x_i}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_i})^{-1} \quad (13)$$

さらに、 $\bar{\mathbf{x}}$ を $\mathbf{x}_i$ に $\mathbf{M}$ を $\alpha \mathbf{P}_{x_{i-1}}$ に置き換えると

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{P}_{x_i} \mathbf{H}_{x_i}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_i)) \quad (14)$$

$$\mathbf{P}_{x_i} = \left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{P}_{x_{i-1}}^{-1} + \mathbf{H}_{x_i}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_i} \right)^{-1} \quad (15)$$

ここに、 $\mathbf{H}_{x_i} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}^T} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$ である。

$\alpha = 1.0$ とすると、これらの式は状態推移行列を単位行列、プロセスノイズを0とした時の拡張カルマンフィルターの式に等しく、さらに、 $\alpha > 1.0$ とおき、同じ観測情報に対し繰り返し適用するとEK-WGI法となる。

また、事前情報に十分な信頼性がない場合には残差二乗和として $\mathbf{J}_4$ の2項目のみを考えれば良く、

$$\mathbf{J}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x})) \quad (16)$$

を目的関数とすれば良い。

3. 数値計算例

図-1に示すような簡単なモデル、並進バネ K_h 、回転バネ K_r を有する剛な棒要素の上端に $f=1.0$ の力を作らせ、いくつかの点で変位が観測されたときのバネ値の推定を行う。

力とモーメントの釣合より、観測点 i における変位は

$$u_i = \left(\frac{1}{K_h} + \frac{2\ell_i}{K_r} \right) \quad (17)$$

となる。

ここで、状態量を $\mathbf{x}^T = \{K_h, K_r\}$ 、観測量を $\mathbf{z}^T = \{u_i; i=1, m\}$ とおき、 m 地点で観測が得られたときの、状態量の推定を行った。観測情報を表-1に示す。

1) 1 地点で観測が得られた場合

ガウスニュートン法、EK-WGI法、DFP法²⁾ による収束過程を図-2に示す。初期値（平均値）は $K_h=1.0$ 、 $K_r=1.5$ とし、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{R}$ を単位行列とした。ガウスニュートン法及びDFP法では目的関数 J_4 の最小点を探索できているが、EK-WGI法では状態量の共分散マトリックスや初期値についても更新するために観測条件式上に収束している。

2) 3 地点で観測が得られた場合

収束過程を図-3に示す。初期値は $K_h=1.0$ 、 $K_r=1.5$ とし、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{R}$ を単位行列とした。1)と同様に、ガウスニュートン法及びDFP法では J_4 の最小点を探索できているが、EK-WGI法では、 J_3 の最小点に収束してしまっている。

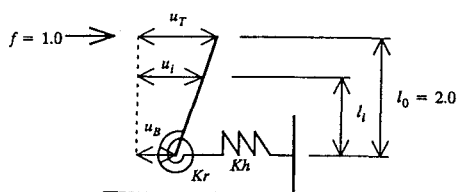


図-1 非線形問題となる逆問題の例

表-1 観測情報

観測点	変位 u_i	観測位置 ℓ_i
1	3.0	2.0
2	1.5	0.5
3	1.8	1.0

参考文献

- 1) 星谷勝・斉藤悦郎：拡張カルマンフィルタを用いた各種振動系への応用，土木学会論文報告集，第339号，1983
- 2) 嘉納秀明：システムの最適理論と最適化，コロナ社，1987

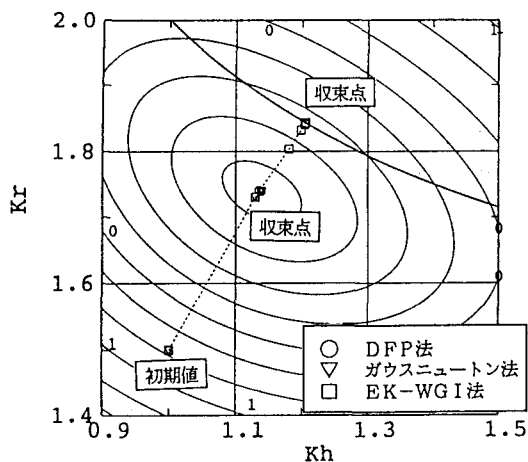


図-2 観測情報が1個の場合の目的関数 J_4 と収束過程

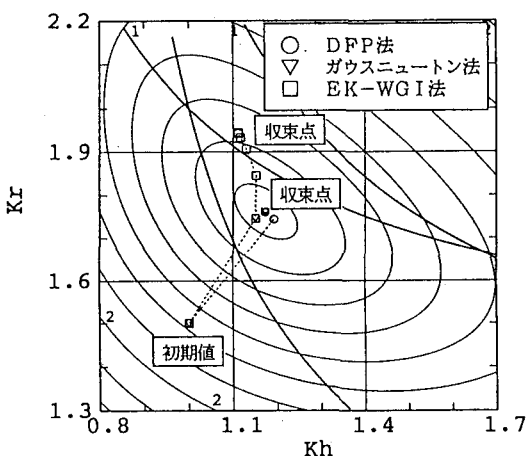


図-3 観測情報が3個の場合の目的関数 J_4 と収束過程

4. まとめ

最尤法に基づく逆解析手法を誘導し、カルマンフィルタのアルゴリズムとの関係も示した。また、EK-WGI法についても考察し、EK-WGI法では、事前情報 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{\Sigma}$ は物理的な意味を持たず、目的関数は J_3 に相当することを例示した。

最後に、有益なご意見を頂いた武蔵工業大学星谷勝教授に謝意を表します。