

東京電機大学 大学院 学生員 ○ 塩谷 俊之
東京電機大学 理工学部 正会員 松井 邦人

1. はじめに

本研究では、構造パラメータを時間領域で同定する問題を対象とした。自由度が増すほど、質量、減衰、剛性マトリックスが大きくなり、運動方程式を解く労力は増加する。そこで、リッツベクトルを用いてマトリックスを縮小し、次元を下げた運動方程式を作成している。感度方程式も同様に次元を低減した式を用いて構造同定を試みた。そして、低減した次数と同定パラメータの精度の関係について検討している。

2. 動的解析

多自由度系運動方程式は、(1)式のようになる。

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = f(s) g(t) \quad (1)$$

M =質量マトリックス、 C =減衰マトリックス、 K =剛性マトリックスで、それぞれ $N \times N$ である。 $f(s)g(t)$ =外力ベクトル、 $\ddot{u}$ 、 $\dot{u}$ 、 u は、それぞれ $N \times 1$ の加速度、速度、変位ベクトルである。

ここで、加速度、速度、変位ベクトルを、次のようにおく、

$$\ddot{u} = Y \ddot{u}_x \quad \dot{u} = Y \dot{u}_x \quad u = Y u_x \quad (2)$$

ここでの Y は $N \times L$ ($N < L$)のリッツベクトルとする。(2)式を(1)に代入して、 Y^T を掛けてやると、

$$M^* \ddot{u}_x + C^* \dot{u}_x + K^* u_x = f^* \quad (3)$$

$$M^* = Y^T M Y \quad C^* = Y^T C Y \quad K^* = Y^T K Y \\ f^* = Y^T f(s) g(t)$$

この式を用いて動的解析を行う。ここに M^* 、 C^* 、 K^* は、 $L \times L$ のマトリックス、 $\ddot{u}_x$ 、 $\dot{u}_x$ 、 u_x は、 $L \times 1$ のベクトルである。

リッツベクトルは、

$$K y_i^* = M y_{i-1} \quad (i=1, L) \quad (4)$$

$$y_i = y_i^* - \sum_{j=1}^{i-1} c_j y_j \quad (5)$$

ただし、 c_i は

$$c_i = \sqrt{\frac{1}{y_i^{*T} M y_i^*}}$$

(4)、(5)式より y_i をもとめる。

但し、 y_1^* は、

$$K y_1^* = f(s) \quad (7)$$

3. 感度解析

質点 i における測定値を $\ddot{v}_i(t)$ 、解析値を $\ddot{u}_i(t)$ 、測定誤差を $\varepsilon_i(t)$ とし、解析値と真値が一致すると仮定すると、

$$\ddot{v}_i(t) = \ddot{u}_i(t) + \varepsilon_i(t) \quad (8)$$

の関係が成立する。ここで、同定パラメータを X_i ($i=1 \sim M$)とすると、 $X = (X_1, X_2, \dots, X_M)^T$ であり、 $\ddot{u}_i$ は X_i ($i=1 \sim M$)の関数である。評価関数 J を次のように定義する。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^M w_i \left(\ddot{v}_i - \ddot{u}_i - \sum_{k=1}^M \frac{\partial \ddot{u}_i}{\partial X_k} \delta X_k \right)^2 dt \quad (9)$$

$t_0 \sim t_1$ は観測データの継続時間、 w_i は重み係数である。ここで、式(9)を最小にするように同定パラメータ $X = (X_1, X_2, \dots, X_M)^T$ を決定する。

そのための必要条件 $\partial J / \partial X_k = 0$ より

$$\sum_{k=1}^M \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^M w_i \frac{\partial \ddot{u}_i}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial \ddot{u}_i}{\partial X_k} \right) dt \cdot \delta X_k \\ = - \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^M w_i (\ddot{v}_i - \ddot{u}_i) \frac{\partial \ddot{u}_i}{\partial X_k} \right) dt \quad (k=1 \sim M) \quad (10)$$

式(4)は ∂X_i ($i=1 \sim M$)に関する連立方程式である。

$\ddot{u}_i$ の同定パラメータに関する偏微分係数は動的感度であり、式(1)を X_i で偏微分して整理すると

$$M \frac{\partial \ddot{u}}{\partial X_k} + C \frac{\partial \dot{u}}{\partial X_k} + K \frac{\partial u}{\partial X_k} \\ = \frac{\partial f(s)g(t)}{\partial X_k} - \frac{\partial M}{\partial X_k} \ddot{u} - \frac{\partial C}{\partial X_k} \dot{u} - \frac{\partial K}{\partial X_k} u \quad (k=1 \sim M) \quad (11)$$

となる。ここでも応答解析と同様にリッツベクトルを用いて感度解析を行っている。そして、式(10)を ∂X_i について解き、 $X_i = X_i + \delta X_i$ として繰り返し計算を行うことにより、 X_i の最適推定値を求めることになる。

今回、重み係数 w_i は、すべて1.0として計算した。

4. 数値解析

図-1)のような多自由度モデルの質量 m_i 、減衰係数 c_i 、剛性 k_i とし、それぞれ、 $m_i = 50/9.8 \text{ t} \cdot \text{s}^2/\text{m}$ 、 $c_i = 0.01 \text{ t} \cdot \text{s}/\text{m}$ 、 $k_i = 3000 \text{ t}/\text{m}$ とし、入力波は正弦波とした。今回の解析モデルは、10自由度系モデルとした。はじめにリッツベクトルを用いて、マトリックスを 3×3 、 5×5 、 8×8 の縮小した応答解析結果を図-2)に示す。

これより、 3×3 にした時に、低層でずれを生じた。しかし、上層では、すべて一致していることを確認した。

つぎに、質量を既知として、減衰係数と剛性を未知パラメータとして、同定をおこなった。同定するにあたり初期値を $c_i=10.5$ 、 $k_i=3150$ t/m とした。収束過程を図-3、(4)に、収束結果を

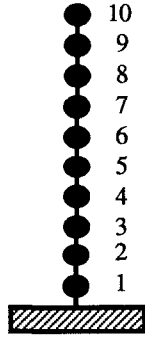


図-1 多自由系モデル

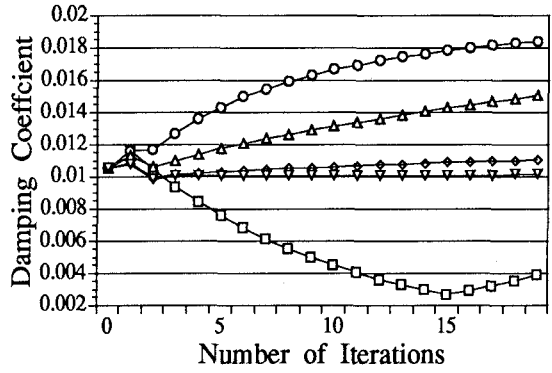


図-3 減衰係数の収束過程

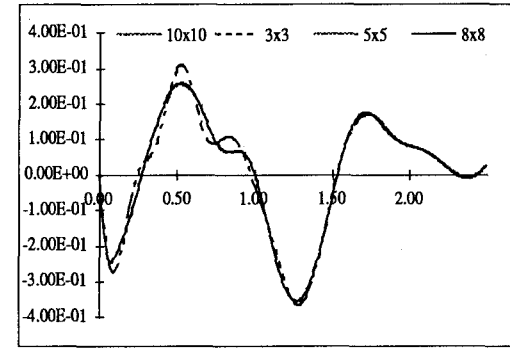


図-2 1層の応答加速度

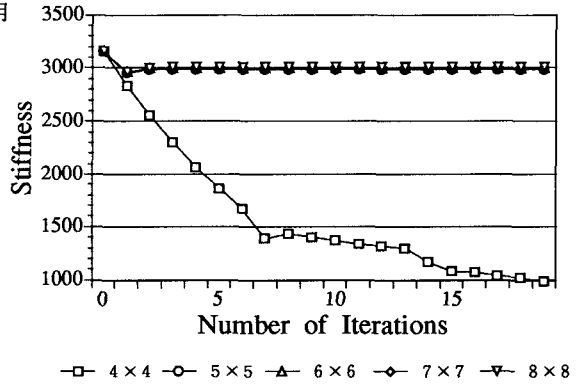


図-4 剛性の収束過程

したリッツベクトルの数と同定結果の精度について検討した。リッツベクトルの数が少ないと剛性よりも減衰係数に大きく影響することが明らかになった。

5. おわりに

リッツベクトルが、同定の精度にどのような影響を与えるかを検討した結果、マトリックスを過大に縮小する

と減衰係数、剛性とも安定した収束結果が得られないことを確認した。本例題のように未知パラメータの多い問題には、本手法は必ずしも有効ではない。しかし、未知パラメータの少なく、自由度の高い問題には適すると思われる。

表-1 収束結果

層	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
行数										
4	減衰係数									
	剛性			2996.23	3044.2					
5	減衰係数	0.010	0.00996	0.0093	0.013		0.015	0.0119		0.0129
	剛性	2999.6	2999.7	3001.2	2999.9	2999.3	2999.2	2999.9	3005.4	2997.4
6	減衰係数	0.01	0.0099	0.01	0.0092	0.0112	0.0084	0.011	0.0098	0.0076
	剛性	3000.0	2999.7	3000.0	3000.4	3000.0	2999.6	3000.1	3000.3	3000.5
7	減衰係数	0.011	0.01	0.0099	0.01	0.0099	0.01	0.0097	0.0104	0.0092
	剛性	3000.0	3000.0	2999.9	3000.0	3000.0	2999.9	3000.0	2999.9	3000.0
8	減衰係数	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
	剛性	3000.0	3000.0	3000.0	3000.0	3000.0	3000.0	3000.0	3000.0	3000.0