

長崎大学工学部 学生員 ○佐藤栄司

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

株式会社熊谷組 正 員 江島裕章

1. まえがき 積層板は、各層の材質、板厚および繊維方向を変化させることによって、利用目的に合ったさまざまな材料を得ることができるため、多くの分野で活用されている。しかし、積層板の支配方程式は異方板の特性と曲げモーメントとねじりモーメントの連成が含まれるために、動的安定まで取り扱った研究はこれまでないようである。そこで、著者らは、積層板の動的安定を解析するために、カップリング効果を見逃した解析<sup>1)</sup>を行い、引き続きカップリングの影響を考慮した解析に拡張する計画である。本研究では、その第1段階としてカップリングを考慮した場合の振動解析と座屈の結果を明らかにするものである。

2. ひずみエネルギーおよび解法 図-1に示すような $n$ 層からなる積層板のひずみエネルギーは、各層のひずみエネルギーを $n$ 個足し合わせることににより求められる。

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + 2\sigma_{zx} \varepsilon_{zx}) dz dA \quad (1)$$

面外せん断変形を見逃した中央面对称積層長方形板の、曲げひずみによるエネルギーは、次式のようにになる。

$$V = \frac{1}{2} \iint_A [D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{16} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{26} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2] dA \quad (2)$$

次に、運動エネルギーおよび $x$ 軸方向の面内力がなす仕事は次式のように与えられる。

$$T(w) = \frac{1}{2} \rho h \iint_A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dA, \quad U = \frac{1}{2} \iint_A [N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2] dA \quad (3)$$

たわみを次式のように仮定する

$$w(\xi, \eta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} W_{mn}(\xi, \eta) \exp(i\omega_{mn}t) \quad (4)$$

ここに、 $A_{mn}$ :未定定数、 $\omega_{mn}$ :固有円振動数

$W_{mn}(\xi, \eta)$ :幾何学的な境界条件を満たす関数

長方形板の境界条件は、次の4種類を考える。

CASE I: 全周辺単純支持、CASE II: 荷重辺単純支持、他対辺固定

CASE III: 荷重辺固定、他対辺単純支持、CASE IV: 全周辺固定

ここに、 $W_{mn}(\xi, \eta) = h_m(\xi) \bar{h}_n(\eta)$

Ritz法を適用すると

$$\frac{\partial}{\partial A_{rs}} (V - T - U) = 0 \quad (5) \quad (r=1, 2, 3, \dots, L, s=1, 2, 3, \dots, L)$$

式(5)に式(3)、(4)を代入して、 $\xi = x/a, \eta = y/b, \beta = a/b$ (縦横比)、 $D_1^* = D_{11}/D_1^0, D_2^* = D_{22}/D_1^0, D_3^* = D_{12}/D_1^0, D_4^* = D_{16}/D_1^0, D_5^* = D_{26}/D_1^0, D_6^* = D_{66}/D_1^0$ ( $D_1^0$ :すべての層の $\theta$ が $\theta=0^\circ$ の時の板剛性)とする無次元化を行い、式(5)の偏微分を実行した後、積分をしてみとめると、次式のように行列表示される。

$$([E] - \lambda^* [F] - \lambda_{cr} [G]) \{A\} = \{0\} \quad (6)$$

ここに、 $[E]: E(s+(r-1)L, n+(m-1)L) = E_{mrns}, [F]: F(s+(r-1)L, n+(m-1)L) = F_{mrns}$

$$[G]: G(s+(r-1)L, n+(m-1)L) = G_{mrns}, \{A\}: \{A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1L}, A_{21}, A_{22}, \dots, A_{LL}\}^T$$

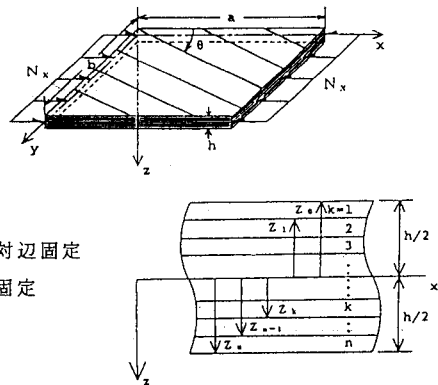


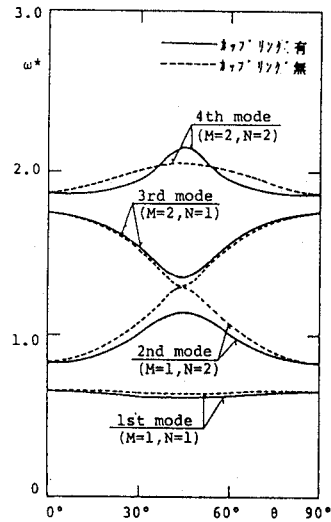
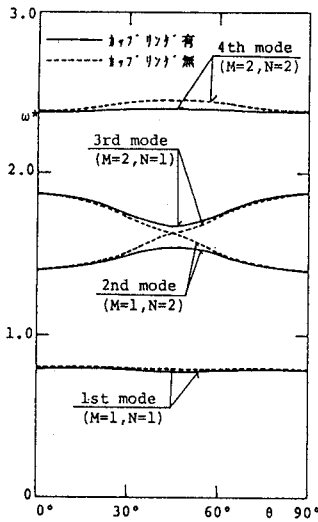
図-1 一般図

$$E_{mrns} = \frac{D_1^*}{\beta^4} I^{22}_{mr} I^{00}_{ns} + \frac{D_3^*}{\beta^2} (I^{02}_{mr} I^{20}_{ns} + I^{20}_{mr} I^{02}_{ns}) + D_2^* I^{00}_{mr} I^{22}_{ns} \\ + 2 \frac{D_4^*}{\beta^2} (I^{12}_{mr} I^{10}_{ns} + I^{21}_{mr} I^{01}_{ns}) + 2 \frac{D_5^*}{\beta} (I^{10}_{mr} I^{12}_{ns} + I^{01}_{mr} I^{21}_{ns}) + 4 \frac{D_6^*}{\beta^2} I^{11}_{mr} I^{11}_{ns} \\ F_{mrns} = I^{00}_{mr} I^{00}_{ns}, \quad \lambda^4 = \rho h \omega_{mn}^2 \frac{b^4}{D_1^0}, \quad G_{mrns} = \frac{1}{\beta^2} I^{11}_{mr} I^{00}_{ns}, \quad \lambda_{cr} = N_x \frac{b^2}{D_1^0}$$

$I^{00}_{mr}, I^{00}_{ns}, \dots : h_m, h_r, \bar{h}_m, \bar{h}_s$  およびその微分からなる定積分。 $\lambda_{cr}=0$  とおけば、自由振動の固有値  $\lambda$  が得られ、 $\lambda=0$  とおけば座屈固有値  $\lambda_{cr}$  が得られる。数値計算においては、式(6)を行列の固有値問題として解くことができる。

### 3. 数値結果

(1) 解の精度 カップリングを考慮した場合の長方形板の力学的境界条件は、カップリングを考慮しない場合と異なってくる。このため、力学的境界条件を満足する必要のないRitz法がGalerkin法より有利である。この場合、CASE IVでは境界条件が幾何学的な条件だけで決められるために、両者による解が全く一致するが、CASE I～CASE IIIでは、両者に差が生じる。よって、本研究ではRitz法により解析を行った。



(2) 固有振動特性 図-2、3に異

図-2 固有振動曲線(EGLASS)

図-3 固有振動曲線(GRAPHITE)

方性の異なる2種類の材料を用いた全周固定正方形板の固有振動曲線をカップリングを考慮した場合と、無視した場合について示す。縦軸  $\omega^*$  は無次元固有振動数、横軸  $\theta$  はラミナの繊維角度である。カップリングの影響を見ると、 $\theta=45^\circ$  付近で最も強く影響を受け、異方性が強い方が影響も強い。

(3) 座屈解析 図-4に材料 GRAPHITE/EPの全周固定長方形板の座屈曲線を示す。縦軸  $\lambda_{cr}$  は座屈固有値、横軸  $\beta$  は縦横比をとった。カップリングの影響を見ると、繊維角度が  $0^\circ$  の場合、カップリングによる影響がなく座屈固有値は一致するが、繊維角度  $\theta$  がある場合の座屈固有値は、カップリング効果の影響ため、無視した場合よりも小さくなる。

4. まとめ 各種境界条件をもつ積層板のカップリング項の評価については講演時に発表する。

### 参考文献

- 1) 高橋、江島、横山:長崎大学工学部研究報告,第22巻,第39号pp,209~216,1992.
- 2) 福田:異方性の積極利用(1),日本複合材料学会誌,14-1,1988.

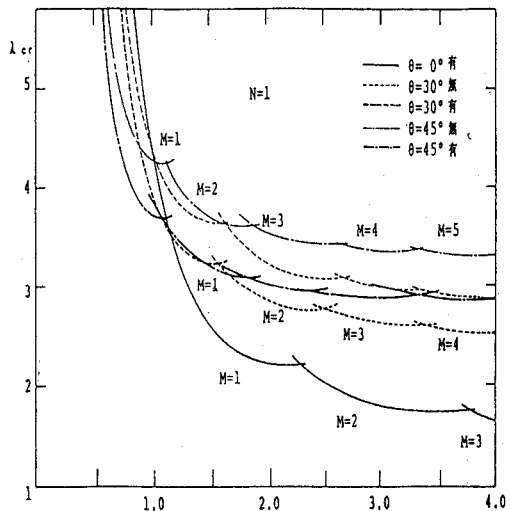


図-4 長方形板の座屈曲線 (GRAPHITE)