

I-74

減衰を有する一自由度系のインパルス応答について

ハザマ技術研究所 松原勝己

1. まえがき 現在、地盤あるいは地盤-構造物連成系の震動解析では、地盤の材料減衰や振動数依存性を有する逸散減衰の取扱いが容易なことから、SHAKEあるいはFLUSH等のプログラムに代表されるように、振動数領域での解を求め、フーリエ逆変換(FFTがよく用いられる)により過渡応答時刻歴が計算されることが多い。この際、初期条件の指定は陽な形で行なわれないが、筆者は先に、一自由度振動系を対象としてフーリエ変換を用いる過渡応答解析での初期条件について検討し、振動系の減衰タイプによって、初変位ゼロ、初速度ゼロの条件が満足される場合と必ずしもそうでない場合があることを示した¹⁾²⁾。本報では、フォークト型減衰と複素減衰を有する一自由度振動系を対象として、伝達関数のフーリエ逆変換を直接に評価することによりインパルス応答を計算し、減衰タイプの違いによる影響を検討したものである。

2. 一自由度振動系の伝達関数

(1) フォークト型減衰を有する場合 図-1に示すような、一自由度系での運動方程式は、次式のように表わされる。

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{y}(t) \quad (1)$$

ここに、 m : 質量、 c : 減衰係数、 k : バネ定数、 $x(t)$: 質点 m の相対変位、

$\ddot{y}(t)$: 地動加速度であり、上付きのドットは時間微分を表わしている。 図-1 一自由度系モデル

ここで、 $k/m = \bar{\omega}^2$ 、 $c/m = 2h\bar{\omega}$ ($\bar{\omega}$: 固有円振動数、 h : フォークト型の減衰定数、 ω : 円振動数)を考慮し、

$x = X e^{i\omega t}$ (X : x の複素フーリエ振幅)と置いて振動数領域で書けば、 $\ddot{x} = -\omega^2 X$ 、 $\dot{x} = i\omega X$ より

$$X = H_V(\omega) \cdot \ddot{Y}, \quad H_V(\omega) = -\frac{1}{\bar{\omega}^2 - \omega^2 + 2i h \bar{\omega} \omega} = \frac{1}{(\omega - \alpha_1)(\omega - \alpha_2)} \quad (2)$$

ここに、 $H_V(\omega)$: フォークト型の減衰を有する一自由度系に対する相対変位の伝達関数、 Y : $y(t)$ の複素フーリエ振幅であり、 $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$ 、 $\alpha_1 = (\sqrt{1-h^2} + i h)\bar{\omega}$ 、 $\alpha_2 = (-\sqrt{1-h^2} + i h)\bar{\omega}$ である。

(2) 複素減衰を有する場合 次に複素減衰タイプでは、式(1)を振動数領域で書き、さらに $i\omega c/k = 2ih_c$ すなわち $c = 2h_c k/\omega$ (h_c : 複素減衰タイプの減衰定数)と置けば、

$$\{-m\omega^2 + k(1 + 2i h_c)\} = -m\ddot{Y} \quad (3)$$

さらに、 $\bar{\omega}^2 = k/m$ を考慮して次式を得る。

$$X = H_c(\omega) \cdot \ddot{Y}, \quad H_c(\omega) = -\frac{1}{\bar{\omega}^2 - \omega^2 + 2i h_c \bar{\omega}^2} \quad (4)$$

ここに、 $H_c(\omega)$: 複素減衰を有する一自由度系に対する相対変位の伝達関数である。式(4)より伝達関数 $H_c(\omega)$ は、応答が実関数となるための条件、 $H_c(-\omega) = \overline{H_c(\omega)}$ ($\overline{H_c(\omega)}$ は $H_c(\omega)$ の複素共役)を満足していないので、 $\omega > 0$ および $\omega < 0$ に対して、次式のように定義する。

$$H_c(\omega) = \begin{cases} H_1(\omega) = -\frac{1}{\bar{\omega}^2 - \omega^2 + 2i h_c \bar{\omega}^2} = \frac{1}{(\omega + \alpha)(\omega - \alpha)} & (\omega > 0) \\ H_2(\omega) = -\frac{1}{\bar{\omega}^2 - \omega^2 - 2i h_c \bar{\omega}^2} = \frac{1}{(\omega + \beta)(\omega - \beta)} & (\omega < 0) \end{cases}$$

$$\alpha = (p + i q)\bar{\omega}, \quad \beta = (-p + i q)\bar{\omega}, \quad p = \sqrt{(\sqrt{1+4h_c^2} + 1)/2},$$

$$q = \sqrt{(\sqrt{1+4h_c^2} - 1)/2}$$

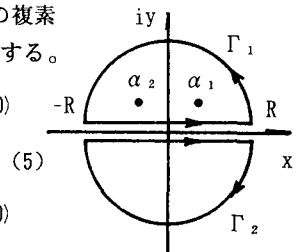
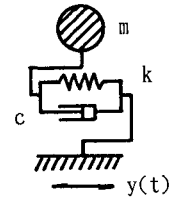


図-2 積分経路
(フォークト型)

3. 一自由度振動系のインパルス応答

(1) フォークト型減衰を有する場合 一般に、インパルス応答 $h_v(t)$ は、伝達関数 $H_v(\omega)$ のフーリエ逆変換として表されるから、式(2)より、

$$h_v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_v(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (6)$$

$t > 0$ に対して式(6)を評価するために、 ω を複素数 z として図-2の実軸および Γ_1 に沿う $H_v(z) e^{izt}$ の複素積分を考えると、伝達関数の特異点の α_1 および α_2 が上半平面に存在するから、 α_1 と α_2 における留数の和で表される。さらに、 $R \rightarrow \infty$ で図-2の Γ_1 に沿う積分はゼロになるから、

$$h_v(t) = \frac{i}{\alpha_1 - \alpha_2} (e^{i\alpha_1 t} - e^{i\alpha_2 t}) = -\frac{e^{-h\bar{\omega}t}}{\sqrt{1-h^2}\bar{\omega}} \sin \sqrt{1-h^2}\bar{\omega}t \quad (\text{ただし } t > 0) \quad (7)$$

また、 $t < 0$ のときは、図-2の実軸および Γ_2 に沿う積分を考慮し、下半平面には特異点はなく、 $R \rightarrow \infty$ で Γ_2 に沿う積分がゼロとなることから、 $h_v(t) = 0$ となる。

(2) 複素減衰を有する場合 インパルス応答 $h_c(t)$ は、式(5)より

$$h_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} H_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 H_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (8) \quad (\text{複素減衰, } \omega < 0)$$

$t > 0$ に対して式(8)を評価するために、 ω を複素数 z として、 $\omega > 0$ のとき図-3の第1象限の積分路に沿う $H_1(z) e^{izt}$ 、 $\omega < 0$ のとき図-4の第2象限の積分路に沿う $H_2(z) e^{izt}$ の複素積分を考えると、伝達関数の特異点 $\pm \alpha$ および $\pm \beta$ が上半平面と下半平面に存在するから、 $\omega > 0$ に対しては α における留数で、 $\omega < 0$ に対しては β における留数でそれぞれ表される。さらに、 $R \rightarrow \infty$ のとき図-3および4の Γ_3 および Γ_5 に沿う積分はゼロとなるので

$$\begin{aligned} h_c(t) &= \frac{i}{2\alpha} e^{i\alpha t} - i \int_0^{\infty} \frac{e^{-ty}}{y^2 + \alpha^2} dy + \frac{i}{2\beta} e^{i\beta t} + i \int_0^{\infty} \frac{e^{-ty}}{y^2 + \beta^2} dy \\ &= \frac{e^{-q\bar{\omega}t}}{\bar{\omega}\sqrt{1+4h_c^2}} (q \cos p\bar{\omega}t - p \sin p\bar{\omega}t) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ty}}{(y^2 + \bar{\omega}^2)^2 + (2h_c\bar{\omega}^2)^2} dy \quad (9) \end{aligned}$$

また、 $t < 0$ のときは、図-3の第4象限および図-4の第3象限の積分路を考慮して、次式を得る。

$$h_c(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{ty} \frac{2h_c\bar{\omega}^2}{(y^2 + \bar{\omega}^2)^2 + (2h_c\bar{\omega}^2)^2} dy \quad (10)$$

式(10)は、 $t < 0$ においても応答が存在することを示しているが、これは既に滝沢³⁾により指摘されており、式(9)および(10)は文献に示された結果と一致している。

4. あとがき 本報では、フォークト型減衰と複素減衰を有する一自由度系を対象とし、伝達関数のフーリエ逆変換を直接に評価することによって得たインパルス応答の比較から、減衰タイプの特徴を検討した。その結果、伝達関数の特異点の位置や応答が実関数になるための条件といった伝達関数の性質の違いに関連して、インパルス応答に因果性の満足されない場合があることが示された。今後は、多自由度系ないし連続体の場合の同様な検討を行ってゆく予定である。

<参考文献> 1) 2) 松原勝己：フーリエ変換を用いる過渡応答解析での初期条件について（その1）（その2）、第19および20回土木学会関東支部技術研究発表会、1992および1993年3月、3) 滝沢春男：線形動力学系の数値構成に関する基礎考察（第二部）、日本建築学会論文報告集、第310号、1981年3月

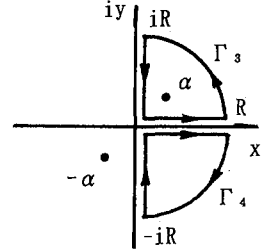


図-3 積分経路
(複素減衰、 $\omega > 0$)

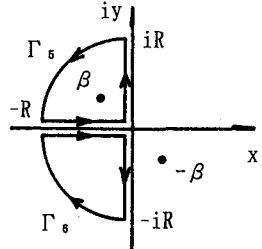


図-4 積分経路
(複素減衰、 $\omega < 0$)