

I-31 座標変換により誘導した平面応力要素を用いた一解析法の精度について

鹿島建設 正 員○平川 龍一 熊本大学 正 員 山尾 敏孝
熊本大学 学生員 日野 雅夫

1. まえがき： 平面応力問題においては、誘導の容易さ、使用しやすさ等によりひずみ一定要素が良く用いられていた。しかし精度を上げるためには分割数が多くなったり、立体解析を行う際に面内回転剛性の欠如の問題があった。本研究では、要素分割数を減らし、かつ面内回転剛性を考慮できる1節点3自由度を有する平面応力要素を線形ひずみ要素より誘導し、その解析精度について検討を行ったものである。

2. 要素剛性マトリックスの誘導： 図1に示すような線形ひずみ要素は、1要素6節点で各節点の自由度は2（ u , v ）である。図2(a)に示すように、各辺の中点変位を両端の節点変位と回転項 θ を加えて表わす事を考える。図2(b)のように線形ひずみ要素の辺12に回転 $\theta_1 = 1$ をかけると、辺に垂直方向の変位 u_n は次式(1)で表わせる。

$$u_n = -\frac{s(1_3 - s)^2}{1_3^2} \quad (1) \quad u_{n4} = 1_3 \frac{\theta_2 - \theta_1}{8} \quad (2)$$

s は節点1を原点に辺12の方向の座標である。 $\theta_2 = 1$ をかけた時も同様なので、中点の n 方向変位は式(2)と書ける。これを x , y 方向の成分に分けて、節点4の変位を求めると次式となる。

$$u_4 = \frac{(u_1 + u_2)}{2} + (y_2 - y_1) \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{8} \right), \quad v_4 = \frac{(v_1 + v_2)}{2} + (x_2 - x_1) \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{8} \right) \quad (3)$$

同様に他の中点 u_5 , v_5 , u_6 , v_6 も表わす事ができ、これらをマトリックスで表示すると

$$\begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & b_3 & \frac{1}{2} & 0 & -b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & a_3 & 0 & \frac{1}{2} & -a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & b_1 & \frac{1}{2} & 0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & a_1 & 0 & \frac{1}{2} & -a_1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & b_2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & a_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad \text{ここに、} \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{(x_3 - x_2)}{8}, & b_1 &= \frac{(y_2 - y_3)}{8} \\ a_2 &= \frac{(x_1 - x_3)}{8}, & b_2 &= \frac{(y_3 - y_1)}{8} \\ a_3 &= \frac{(x_2 - x_1)}{8}, & b_3 &= \frac{(y_1 - y_2)}{8} \end{aligned} \quad (4)$$

となり、6節点の変位 $\{d\}^T = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4, u_5, v_5, u_6, v_6\}$ と新しい三角形の節点変位 $\{d^*\}^T = \{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2, u_3, v_3, \theta_3\}$ の関係が座標変換マトリックス $[T]$ を用いて次式(5)で表わせる。新しい三角形要素の剛性マトリックス $[k^*]$ は $[T]$ を用いて次式(6)となる。

$$\{d\} = [T] \{d^*\} \quad (5) \quad [k^*] = [T]^T [k] [T] \quad (6)$$

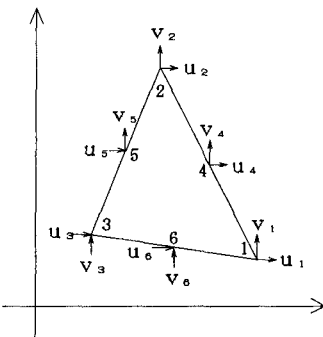


図1 線形ひずみ要素

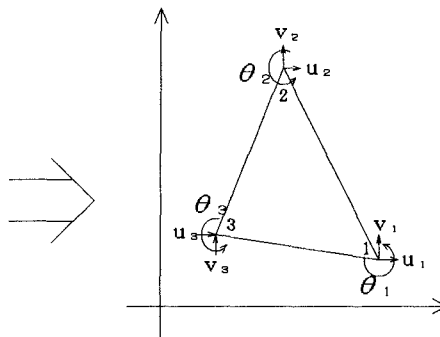
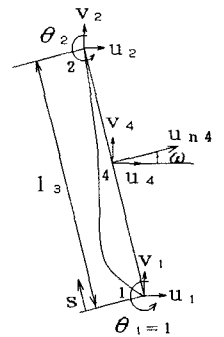


図2(A) 新しい三角形要素



(b) 辺12

3. 解析結果と考察：

図3のような片持ちばりを解析モデル1とし、一定ひずみ要素（CST）と従来の線形ひずみ要素（LST）、新しく誘導した三角形要素（LSTN）との比較を行う。図5は変位曲線で、図6は自由端の変位の精度と総自由度の関係を表わしたものである。なお、理論値 v_t は、せん断変形を考慮している。CSTに比べてLSTNは、要素分割数を減らすことができ、かつ十分な精度を得る事ができると思われる。

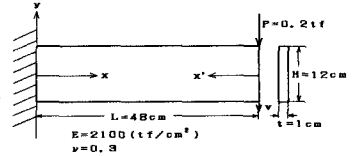


図3 解析モデル1

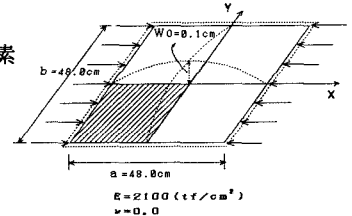


図4 解析モデル2

次に初期たわみを有する図4に示す周辺単純支持の正方形1方向圧縮板を、LSTNを用いた場合と従来のCSTと面内回転剛性を持つ要素（CSTR）の場合の精度について検討する。板の初期たわみは、最大を $W_0=0.1\text{cm}$ となるようにCOS関数で与える。弾性解析ではCoanの厳密解³⁾と弾塑性解析では北田ら⁴⁾が行った解析結果との比較検討を行う。

図7は弾性解析で、板の最大たわみを板厚で無次元化したものと平均圧縮応力を座屈応力 σ_{cr} で無次元化したものとの関係を示している。LSTNは16要素でほぼCoan曲線に近い値を得る事ができ、CSTRに比べ分割数を減少できた。また同じモデルで弾塑性解析を行い、応力ひずみの関係は完全弾塑性として取り扱った。弾塑性解析の場合、板厚方向の分割数も精度に関係するが、ここでは、妥当と思われる板厚方向に4分割したモデルを用いた。図8よりLSTN16要素でほぼ北田らの解析結果に近い値が得られた。

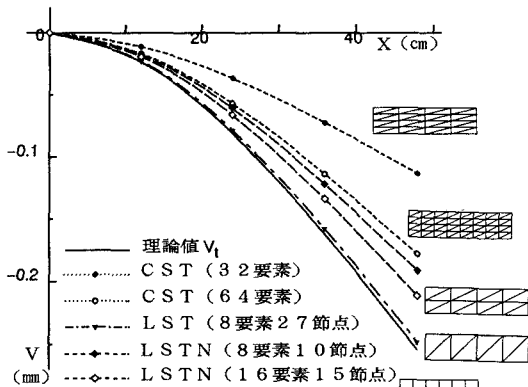


図5 変位曲線

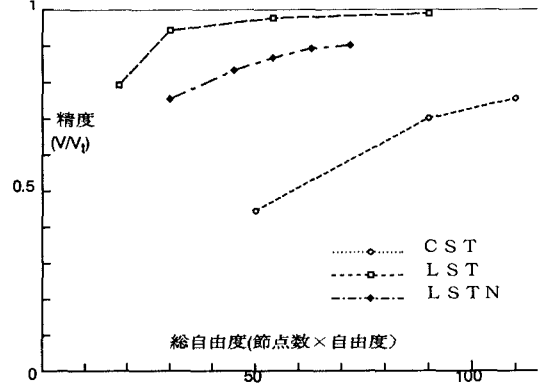


図6 総自由度と精度の関係

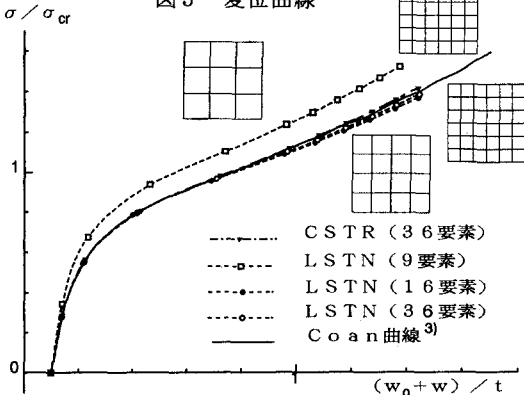


図7 平均応力度と最大たわみ（板厚2分割）

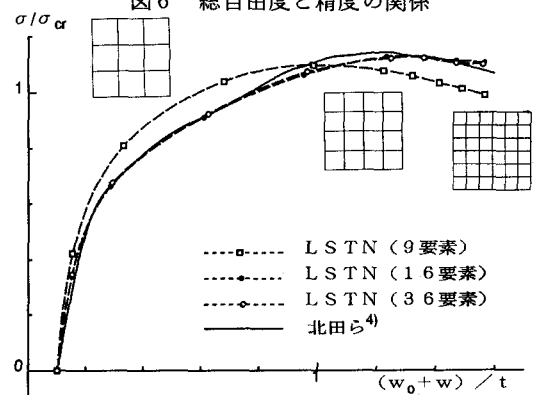


図8 平均応力度と最大たわみ（板厚4分割）

- 参考文献 1) 鷲津ら：有限要素法ハンドブック，1981. 9 2) Cook, R. D., "On the Allman...", 1986
3) Corn, M. K.: Large deflection..., J. Applied, Mech., Vol. 18, 1951
4) 北田俊行：圧縮力を受ける鋼板及び補剛鋼板の極限強度に関する研究，1980. 6