CS 130　シュワルツ－クリストッフェルの変換による２次元任意形状物体まわりの等角写像関数

福岡工業大学　正員　溝田武人　九州電工　相庭　哲

１．まえがき

離散渦法による円柱や四角柱まわりの流れの研究については，すでに，いくつかの研究がなされているが，実際上問題になる任意形状物体まわりの研究は，まだ完成されたものとは言えない．任意形状物体を多角形で表して，その外部の領域を単位円の外部の領域に写像する関数はSchwartz-Christoffelの変換公式として一般的に微分形で与えられる．しかし，実際上は，積分を求めることがなかなかめんどうである．

本研究では，２次元任意形状物体の境界をＮ多角形で表し，Ｎを大きくすることで，元の任意形状物体を近似的に表現することを考える．そして，Schwartz-Christoffelの変換公式のＮ個の項を二項級数による展開式で表し，各項の積の計算を実際上問題にならない精度の範囲で打ち切る．展開式で表示すると積分が容易に実行できるので，多角形の外部領域を単位円外部領域に等角写像する関数を比較的容易に求めることができる．この報告では，これらの計算過程を説明し，この方法によって正Ｎ角形のまわりの流線を求めた結果を報告する．

２．Ｎ角形の写像変換

主な記号　Ｚ：$Z=X+iY$，物理平面座標　ζ：$\zeta=\eta+i\xi$，写像平面座標　Ｎ：Ｎ角形

β：多角形の外角　μ：外角係数，$\mu=\beta/\pi$

物理平面上の多角形の外部領域をζ写像平面上の単位円の外部領域に等角写像するには次のSchwartz-Christoffelの写像関数を求めることで得られる[1]．

$$dZ=C\,(1/\zeta^2)\prod_{n=1}^{N}(\zeta-\zeta_n)^{\beta n/\pi}\,d\zeta \qquad \cdots\cdots(1)$$

但し，$|\zeta|>1$．

ここで，β_nは　図１に示すように多角形の外角である．また，ζ_nは多角形の頂点に対応する単位円上の対応点である．外角係数を　$\mu_n=\beta_n/\pi$　として(1)式を変形して(2)式を得る．

$$dZ=C\,(1-\zeta_1/\zeta)^{\mu_1}(1-\zeta_2/\zeta)^{\mu_2}\cdots(1-\zeta_n/\zeta)^{\mu_n}d\zeta \qquad \cdots\cdots(2)$$

(2)式の右辺の各項を，次のような，ベキ級数展開式を用いて表す．

$$(a+b)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\{k(k-1)(k-2)*\cdots\cdots*(k-n+1)*a^{k-n}*b^n/n!\} \qquad \cdots\cdots(3)$$

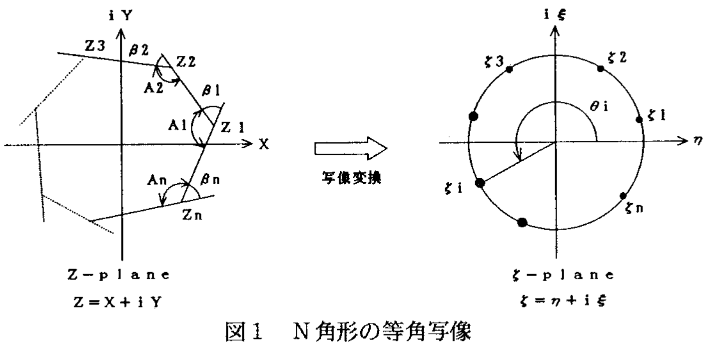

図１　Ｎ角形の等角写像

(1),(2)式において，ζ_nは単位円周上にあり，

$$\theta_1<\theta_2<\cdots\theta_i\cdots<\theta_n<2\pi+\theta_1$$

のような順序で並んでいる．ここでθ_nはζ平面上の原点と単位円周上にあるＮ角形の頂点の対応点が，Ｘ軸となす角である．ここで，Ｎ角形$Z_1Z_2\cdots Z_n$の形が与えられたとき，上の諸公式で， 外角β_nは既知の量である．一方，ζ_nおよびＣは未知の量であって，

$$\overline{Z_1Z_2}=\left|\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} dz/d\zeta * d\zeta\right|,\ \overline{Z_2Z_3}=\left|\int_{\zeta_2}^{\zeta_3} dz/d\zeta * d\zeta\right|, \qquad \cdots\cdots(4)$$

のようなＮ個の条件を満足するように$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$決めなければならない．このためには，Ｎ個の複素数の解を持つ非線形連立方程式を解かなければならない．この連立方程式は，２Ｎ個の実数型の非線形連立方程式に変換できる．

３．正Ｎ角形のまわりのポテンシャル流れと結論

これまでに得られた正Ｎ角形の場合の写像関数を求める計算結果から，正３角形，正方形，正５角形，正７角形のまわりのポテンシャル流れによる流線を以下に示す．非正Ｎ角形への拡張は今後行う．

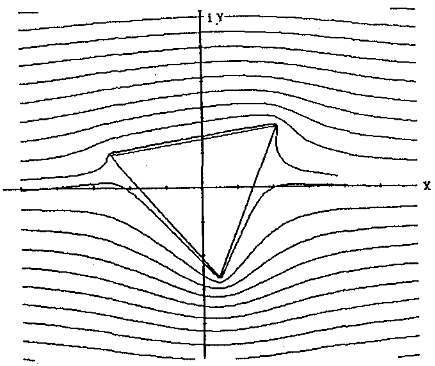

図２　正３角形，回転角３０°

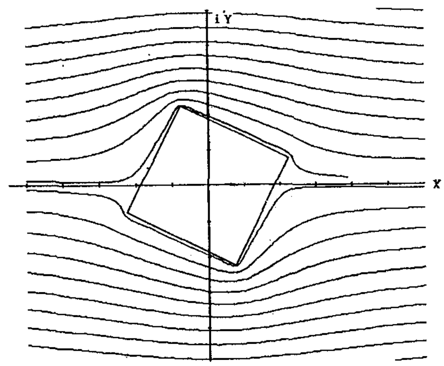

図３　正４角形，回転角１５°

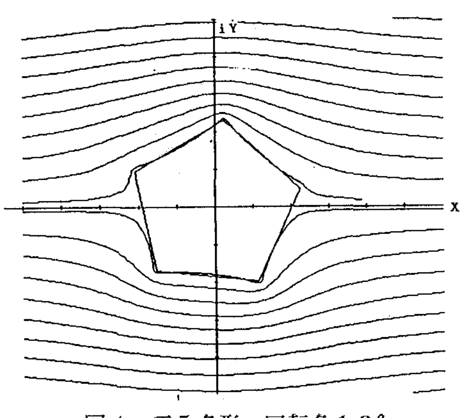

図４　正５角形，回転角１０°

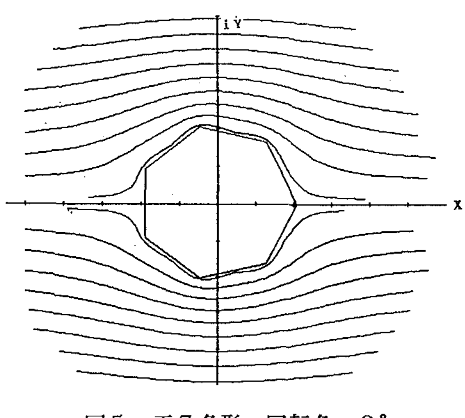

図５　正７角形，回転角　０°

参考文献

1)今井　功：等角写像とその応用，岩波書店，1979