

CS 51

弾性散乱エネルギー量の近似算定式

東海大学海洋学部 学生員 ○加藤 昇治
東海大学海洋学部 正 員 北原 道弘
ユニテック 正 員 中川 克也

1. はじめに

超音波を材料内に送信し、超音波の散乱による減衰量を計測することにより、材料の不均質性を評価することが考えられる。このための第一段階として、ここでは、材料内に存在する不均質部による散乱波動エネルギーの近似算定法について考え、近似算定法の精度確認を行う。

2. 弾性散乱エネルギー

散乱波 u_i^S が有する単位時間当りのエネルギー P^S を入射波 u_i^I の単位面積、単位時間当りのエネルギー I^I で除したものは弾性散乱断面積と呼ばれ、次のように定義されている。

$$P(\omega) = \frac{\langle P^S \rangle}{\langle I^I \rangle} = \frac{\langle \int_A \hat{x}_i \sigma_{ij}^S \dot{u}_j^S dA \rangle}{\langle \hat{p}_i^I \sigma_{ij}^I \dot{u}_j^I \rangle} \quad (1)$$

ここに、 $\hat{x}_i$ は散乱波のエネルギーを計算するために設けた閉曲面 A の単位法線ベクトルであり、 $\hat{p}_i^I$ は入射波の進行方向を表す単位ベクトルである。また、上付きのドットは時間微分、 $\langle \cdot \rangle$ は波動の一周期にわたる時間平均を表す。上記散乱断面積 P は、入射波に対する散乱波のエネルギー比を面積の次元で表現したものと解釈することができる。以下、この弾性散乱断面積 P を近似的にでも簡単に算定する方法について考えたい。

3. 弾性散乱振幅

式(1)における散乱波 u_i^S は材料内の不均質部の存在により生じるから、不均質部と散乱波の関係を導く必要がある。ここでは、次のような遠方散乱波の積分表現を利用する。

$$\begin{aligned} u_i^S(\mathbf{x}) &\sim u_i^{SL} + u_i^{ST} \\ &= A_i(k_L) \frac{e^{ik_L x}}{x} + B_i(k_T) \frac{e^{ik_T x}}{x} \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{A}$ は縦波の、 $\mathbf{B}$ は横波の散乱振幅であり、それぞれ次のように書ける。

$$A_i(k_L) = \hat{x}_i \hat{x}_j f_j(k_L) \quad (3a)$$

$$B_i(k_T) = (\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j) f_j(k_T) \quad (3b)$$

上式中のベクトル $\mathbf{f}$ が、不均質部の形状、不均質部表面上の変位・応力ベクトル、入射波の波数、また伝播母材内の物性に関係する量であり、次のようになる。

$$\begin{aligned} f_j(k_\alpha) &= \frac{1}{4\pi\rho c_\alpha^2} \int_S [ik_\alpha \lambda \hat{x}_j u_k(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) \\ &\quad + ik_\alpha \mu \{u_j(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) + u_k(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y})\} \hat{x}_k \\ &\quad + t_j(\mathbf{y})] e^{-ik_\alpha \hat{x}_i y} dS_y, \quad (\alpha = L, T) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 S は不均質部の表面、 n_i は S 上の単位法線ベクトルである。また、式(2)の右辺第1項が散乱波の縦波成分、第2項が横波成分である。

4. 弾性散乱断面積の近似表現

式(1)の右辺を具体的に計算するための表現を得たい。まず、全変位場 u_i を入射波 u_i^I と散乱波 u_i^S の和として次のように分離する。応力についても同様。

$$u_i = u_i^I + u_i^S \quad (5a)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^S \quad (5b)$$

このとき、応力と粒子速度の積は次のように書ける。

$$I_i = \sigma_{ij} \dot{u}_j = I_i^I + I_i^{IS} + I_i^S \quad (6)$$

ここで、

$$I_i^I = \sigma_{ij}^I \dot{u}_j^I \quad (7a)$$

$$I_i^{IS} = \sigma_{ij}^I \dot{u}_j^S + \sigma_{ij}^S \dot{u}_j^I \quad (7b)$$

$$I_i^S = \sigma_{ij}^S \dot{u}_j^S \quad (7c)$$

であり、 I_i^{IS} は入射波と散乱波の干渉項である。

いま、不均質部(の表面 S)を含む十分大きな閉じた球形領域 D 内のエネルギー収支を考える。エネルギー保存則より、領域 D の表面 A を通過する単位時間当りのエネルギーの総量は、入射波が D 内に持ち込む単位時間当りのエネルギーに等しいから、次式が成立する。

$$\int_A \hat{x}_i I_i dA = \int_A \hat{x}_i I_i^I dA \quad (8)$$

上式の左辺に、式(6)と(7)の表現を代入すると、散乱波が有する単位時間当りのエネルギーを、干渉項が有するエネルギーにより次のように表すことができる。

$$\int_A \hat{x}_i I_i^S dA = - \int_A \hat{x}_i I_i^{IS} dA \quad (9)$$

計算の便宜上、 A を無限遠方の球面に選べば、 $dA = x^2 d\Omega$ ($d\Omega$ は立体角)となり、式(9)は次のように書ける。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \int \hat{x}_i \sigma_{ij}^S \dot{u}_j^S d\Omega = - \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \int \hat{x}_i (\sigma_{ij}^I \dot{u}_j^S + \sigma_{ij}^S \dot{u}_j^I) d\Omega \quad (10)$$

上式(10)を散乱全断面積の定義式(1)に代入して、散乱全断面積に対する次の表現を得る。

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{\langle P^S \rangle}{\langle I^I \rangle} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \int \hat{x}_i \langle \sigma_{ij}^S \dot{u}_j^S \rangle d\Omega}{\langle I^I \rangle} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \int \hat{x}_i \langle \sigma_{ij}^I \dot{u}_j^S + \sigma_{ij}^S \dot{u}_j^I \rangle d\Omega}{\langle \hat{p}_i^I \sigma_{ij}^I \dot{u}_j^I \rangle} \end{aligned} \quad (11)$$

この表現より、散乱全断面積は入射波と散乱波の干渉項により評価できることがわかる。

より具体的に、入射波を x_3 軸方向に伝播する単位振幅の平面縦波とする。

$$u_i^I = a_i e^{ik_L x_3}, \quad (a = (0, 0, 1)) \quad (12)$$

この入射波の表現 (12) と遠方散乱波の積分表現 (2) を散乱断面積の表現 (11) の最右辺に代入し、遠方 ($x \rightarrow \infty$) という条件を用いて近似的に式 (11) の積分を実行して、最終的に、弾性散乱断面積に対する次の近似表現を得る。

$$P(\omega) = \frac{4\pi}{k_L} I_m [A_3(k_L, \theta = 0)] \quad (13)$$

ここに、 k_L は縦波の波数、 $A_3(k_L, \theta = 0)$ は x_3 軸から計った散乱角 $\theta = 0$ における縦波の散乱振幅 A_3 である。散乱振幅の入射波の進行方向成分 A_3 は、式 (3a) と (4) を用いて決定できる。Fig.1 に近似表現 (13) の物理的意味を図化して示す。入射平面縦波と不均質部による散乱波の縦波成分の干渉が入射波の進行方向に向いた前方 ($\theta = 0^\circ$) で生じ、この効果が式 (13) として評価されている。

5. 近似算定式の精度確認

不均質部が半径 a の球形インクルージョンの場合について、散乱断面積を定義式 (1) に基づいて計算・整理した結果を Fig.2 に示す。図中の Soft, Hard1, Hard2 とは、次のような物性比の場合である。

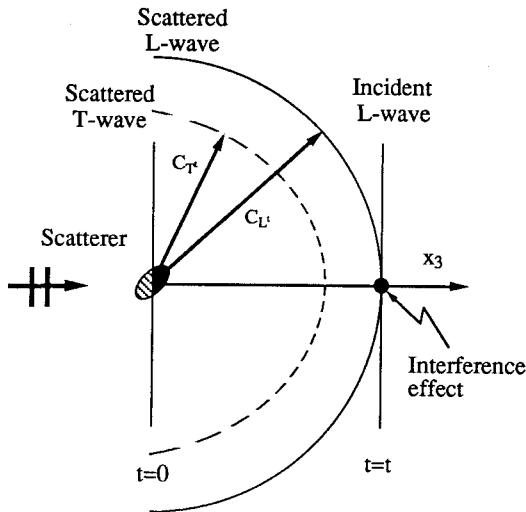


Fig.1 Interference effect.

$$\begin{aligned} \text{Cavity} : & \quad E = 1.0, \nu = 0.30, \quad \rho = 1.0 \\ \text{Soft} : & \quad \bar{E}/E = 0.2, \bar{\nu} = 0.3, \bar{\rho} = 0.2 \\ \text{Hard1} : & \quad \bar{E}/E = 2.0, \bar{\nu} = 0.3, \bar{\rho} = 1.0 \\ \text{Hard2} : & \quad \bar{E}/E = 5.0, \bar{\nu} = 0.3, \bar{\rho} = 1.0 \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{E}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\rho}$ がインクルージョン側のヤング率、ポアソン比、密度であり、 E , ν , ρ が母材側である。図には、比較のために、キャビティに対する結果（黒丸）も挿入してある。散乱断面積の近似算定式 (13) の精度を確認するために、球の半径 a で無次元化した縦波の波数 $ak_L = 1.0, 2.0, 3.0$ の場合について、定義式 (1) と近似式 (13) による結果を整理したものが Table 1 である。近似算定式 (13) の精度はかなり良いことがわかる。

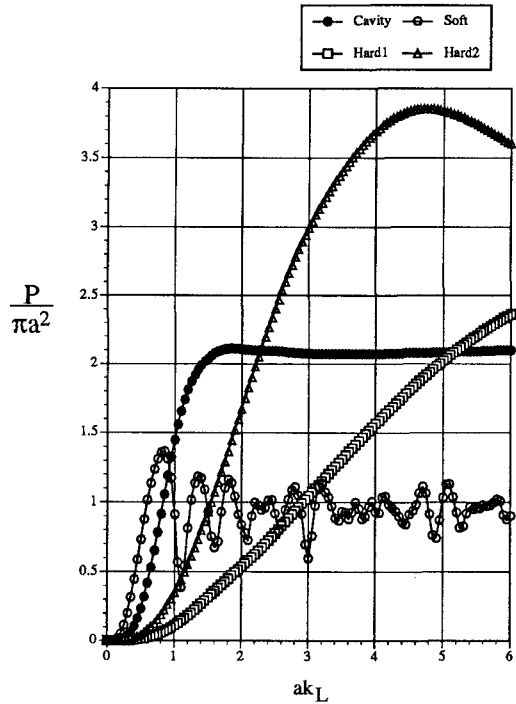


Fig.2 Scattering cross sections for spherical inclusions.

Table 1 Scattering cross sections for spherical inclusions.

	$ak_L=1.0$		$ak_L=2.0$		$ak_L=3.0$	
	Definition Eq.(1)	Approximation Eq.(13)	Definition Eq.(1)	Approximation Eq.(13)	Definition Eq.(1)	Approximation Eq.(13)
Cavity	1.462	1.446	2.134	2.107	2.103	2.075
Soft	0.924	0.913	0.849	0.838	0.604	0.596
Hard1	0.114	0.113	0.545	0.537	1.063	1.046
Hard2	0.352	0.348	1.693	1.670	3.042	2.993