VI-20 ベイズ方式による災害発生数の推定について

労働省産業安全研究所 正員 花安繁郎

1．まえがき

事業所での労働災害発生危険性の評価法のひとつとして，ある期間で発生した災害数を分析する方法がある。そしてそのための災害発生数の確率分布式にはポアソン分布が用いられることが多い。

周知のように，ポアソン分布では，災害は相互に独立に発生し，かつ単位時間当りの発生数（災害発生頻度率）は一定であると仮定している。

しかし，災害発生頻度率は一定した値であるよりも，むしろ，さまざまな要因の影響によって常に変動していると考えた方が合理的なことが多い。

このような問題の解決法のひとつとして，前報[1)]では，災害発生頻度率がある確率分布(ガンマ分布)に従って変動すると仮定し，ポアソン分布との複合化を経て負の二項分布を導出し，実際の災害事例を用いて同式の検証を試みた。

ところが，災害はそう頻繁に起こるわけではないので，大量の災害データを観察して信頼性の高い災害発生頻度率分布のパラメータを推定出来ることは比較的限られており，実際にはその場で得られたありあわせのデータを用いて推定したり，あるいはせざるを得ないことが多い。

そこで本報では，少数のデータでも適用が可能なベイズの定理を用いて，災害に関する事前情報が与えられたときの災害発生率の確率分布を導出し，さらに同確率分布式を用いて災害発生数の分布を求め，災害発生数の確率的な評価を行うことを試みた。本稿はそれらの検討結果をまとめたものである。

2．ベイズ方式による災害発生率の推定[2)]

災害発生数がポアソン分布に従うときの災害発生率λの分布は，ベイズの定理によって次のように求められる。すなわち，ある期間T_0においてX_0件の災害が発生したときの災害発生率λの事後確率分布は次式で与えられる。

$$h(\lambda)=\frac{(\lambda T_0)^{X_0}\,T_0}{X_0!}\cdot\exp\{-\lambda T_0\} \qquad (1)$$

また，期間T_0でX_0件の災害が発生したのに続き，さらに期間T_1でX_1件の災害が発生したときの災害発生率λの事後確率分布は，上式の分布を新たな事前分布としてベイズの定理を適用すればよく，以下同様に，期間T_iでX_i件の災害が発生したことを(X_i, T_i)と記すと，(X_1, T_1)，(X_2, T_2)，・・・・・，(X_n, T_n)のもとでの災害発生率の事後分布の一般式は次式となる。

$$h(\lambda)=\frac{(\lambda T)^{X}\,T}{X!}\cdot\exp\{-\lambda T\} \qquad (2)$$

$$\text{ここに}\quad X=\sum_{i=0}^{N}X_i\ ,\quad T=\sum_{i=0}^{N}T_i \qquad (3)$$

かくして，期間Tにおいて X件の災害が発生したときの災害発生率λの事後分布は，事前情報であるX, Tをパラメーターとするガンマ分布となることが示された。また，ベイズの方式では，データが得られる度に新規に得られた情報とそれ以前の情報とを統合し，情報を更新しながら新たな事後分布を求めることが出来ることも特徴としてあげられる。

前報[1)]において，災害発生率の分布として，主として複合化を行う計算上の都合からガンマ分布を採用したが，このように，ベイズの定理から事後分布として同分布が導出されており，ガンマ分布が計算

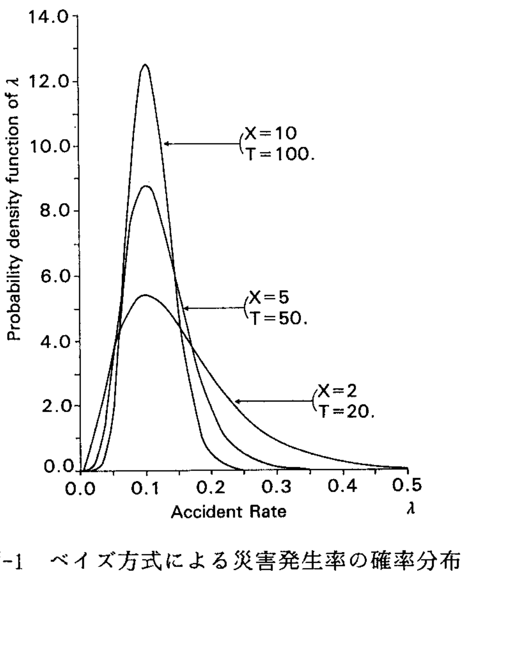

図-1 ベイズ方式による災害発生率の確率分布

上の利便さのみならず確率論的にも裏付けを有した分布であることを明かにすることが出来た。

ベイズ定理による災害発生率の分布を分析した事例として，ここでは，平均災害率を$\lambda=X/T=0.1$に一定に保ち，$(X,T)=(10,100),(5,50),(2,20)$の3つの異なったケースについて災害発生率の事後分布を求めた結果を図-1に示した。同図から，同じ平均災害発生率であっても，観測期間が長いほどλの変動が小さくなることがわかる。これはTが長いほどλの分布の分散が小さくなるためである。

3．ベイズ方式による災害発生数の評価[2)]

事前情報が与えられたときの災害発生率λの事後分布が分かったので，期間tの災害発生数の分布を求めるにはポアソン分布を同式で複合化すればよい。

$$P(K)=\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^K}{K!}\cdot\exp\{-\lambda t\} \times \frac{(\lambda T)^X T}{X!}\cdot\exp\{-\lambda T\}d\lambda$$

$$=\frac{(X+K)!}{X!K!}\cdot\left(\frac{T}{T+t}\right)^{X+1}\left(\frac{t}{T+t}\right)^K \qquad (4)$$

$$E(K)=\frac{(X+1)t}{T},\quad V(K)=\frac{(X+1)(T+t)t}{T^2} \qquad (5)$$

このように結果は前報と同様に負の二項分布となるが，これまでと異なる点は分布のパラメーターX,Tが既に与えられていることにある。

同式による計算事例として，前節で求めた3種類の災害発生率λの事後分布（図-1）のもとで，観測期間をt=100のときの災害発生数の分布を計算した結果

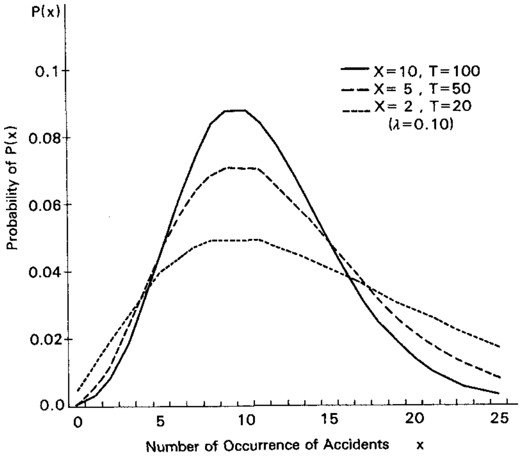

図-2　ベイズ方式による災害発生数の確率分布

を 図-2に示した。同図に示す通り，事前情報として与えられる平均災害発生率($\lambda=X/T$)が同一であっても，事前情報の観測時間数の長さに応じて災害発生数の分布形状が異なることがわかる。すなわち，図-1と同じく観測期間が長いほど災害発生数の分布の変動幅が小さくなっていることが示されている。

ここで図-1,2において，$\lambda=X/T=\text{const.}$に保ったままで期間$T\to\infty$（従って$X\to\infty$）の極限を考えてみると，まずλについては，最終的には$h(\lambda)=X/T$の一点分布となり，一方災害発生数の極限分布は，次のポアソン分布となることを示すことが出来る。

$$P(K)=\frac{(t\cdot X/T)^K}{K!}\cdot\exp\{-t\cdot X/T\} \qquad (6)$$

このようにポアソン分布は負の二項分布の極限分布であるので，ポアソン分布を負の二項分布の近似分布として用いる場合には，災害発生率λの分布状況を検討しておくことが大切である。

4．むすび

以上本報告では，ベイズの定理を利用して，ある時点までに得られた災害情報をもとに災害発生率の確率分布を推定し，同分布式とポアソン分布とを複合化して負の二項分布を発生数の分布として導出し，これらの確率分布式を用いて災害発生数の評価を行うこと行う方法について検討を加えた。

災害データが数多くあるときは，データから信頼度の高い災害発生率を推定することが出来るが，一般の事業所では必ずしも十分なデータが蓄積されている訳ではない。従って，少数のデータであっても災害発生率を推定することが出来るベイズ方式の分析法は，このような場合には大変便利な手法と思われる。さらにベイズ定理による推定法は，観測期間が長くなり災害情報が多く得られるに従って，推定される災害発生率の確心度が高まる特性を有しているので，少数データによる推定から大量データによる推定まで，幅広い範囲の評価に適用出来る利点も有している。今後この手法が安全性評価で果す役割は大きいと考えられる。

参考文献 1)花安:災害頻度率の変動を考慮した災害数の分布について，第45回土木年講，VI-143，1990
2) 花安:災害発生時間の分布に関する研究(3)，労働省産業安全研究所究報告，RIIS-RR-89-5，1990