Ⅳ-334　乗継ぎ利用客を考慮した航空ネットワークのスケジューリングモデル

東北大学大学院　学生員　○　鬼柳　雄一
東北大学工学部　正　員　　徳永　幸之
東北大学工学部　正　員　　稲村　肇

１．はじめに

コミューター航空等においては、単独では採算の取れない航空路線が数多く存在する。このような場合でも、各路線が有機的に結び付いた運航スケジュールを組むことができれば、乗継ぎ利用客の発生により航空会社にとっての運航利益は増大するものと考えられる。

この乗り継ぎ利用客も考慮するスケジューリング問題は変数間の相互関係を含むため、線形計画モデルでは扱うことが困難であった。本研究では、上記のような問題に対して２次計画法を適用することにより定式化し、乗継ぎ利用者の取り扱いが可能なスケジューリングモデルを作成することを目的としている。

２．２次計画問題

２次計画問題をベクトル表示すると、(1)式のような１次の制約条件式のもとで(2)式のような２次の目的関数を最小化することと表される（ただし’は転置を表す）。

$$Ax = b \quad (x \geqq 0) \tag{1}$$

$$F(x) = p'x + 1/2\, x'Cx \tag{2}$$

ここで (2)式の全域的最小が保証されるためには、(2)式が凸関数でなければならない。(2)式の１次の項を凸関数と考えれば、 $x'Cx$が凸関数であれば (2)式は凸関数となる。これは、Cが正定値の対称行列でなければならないということを意味している。２次計画問題の解法にはいくつかあるが、本研究ではKuhn-Tuckerの定理にもとづくWolfeの方法[1]を用いた。

３．航空スケジューリング問題の定式化

（１）決定変数

まず考えられうる全てのフライト案（駐機も含む）に対して、各フライト案に機材を割り当てるか割り当てないかを表す決定変数x_{hkij}を設定する。

$$x_{hkij} = \begin{cases} 1 & \text{（割り当てる）} \\ 0 & \text{（割り当てない）} \end{cases} \tag{3}$$

（h:機材，k:出発時刻，i:発空港，j:着空港）

（２）制約条件

制約条件として、各機材はある時間断面ごとにただひとつのフライト案を選択する、ということを立式する。式で表すと、(4)式のようになる。

$$\sum_k \sum_i \sum_j x_{hkij} = 1 \tag{4}$$

（３）目的関数

目的関数は運航利益の総和を表し、これを最大化するものとする。ここで運航利益は直行便の利用によるものと乗継ぎによるものとの和であると考える。直行便の総運航利益については１次式の係数で表すことができるが、乗継ぎについては二つの変数の相互関係を考慮しなければならないため２次式の係数として表す必要がある。

また、この２次式$x'Cx$ の項においては全ての変数の組合せを考えており、同時に選択してはいけないフライト案の組合せも存在する。ふたつのフライト間の回送時間が不足しているような組合せや、その日最初に運航を開始した空港（母空港）に、空港運用時間内に戻ることができないようなフライト案の組合せがこれに当たる。このような場合には、負の罰金を行列Cに与えておくことにより、同時に選択しないよう制限することができる。

よって本研究における目的関数をベクトル表示すると(5)式のようになる。ここでp'は直行便の運航利益を要素とするベクトルであり、Cは乗継ぎ利用による利益の増加分、及び罰金を要素とする行列である。

$$F(x) = p'x + x'Cx \tag{5}$$

（４）解の整数化

本研究で考えている問題は、あるフライト案に機材を割り当てるか割り当てないかの０－１整数問題である。しかし、本定式化によると解は一般に実数解となる。従って、本研究では分枝限定法を用いて解の整数化を行った。

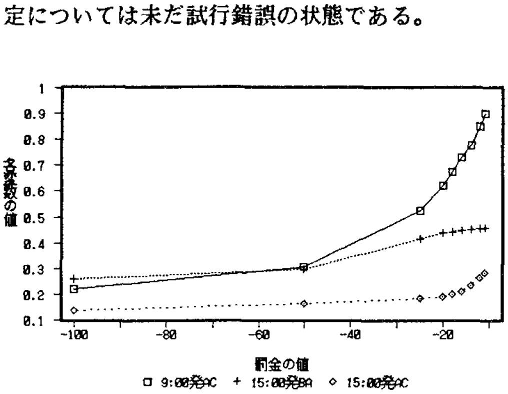
４．２次計画法の適用における問題点

(5)式を最小化問題として書き換えると(6)式のようになる。

$$f(x) = -p'x - x'Cx \qquad (6)$$

ここで、本定式化では行列（－Ｃ）の対角項がすべて０となり一般に正定値とはならないため、最適性が保証されないという問題がある。これに対する対策として、（－Ｃ）の対角項に一律に値を与えることにより正定値にすることはできる。この操作により関数形は変化してしまうことになるが、総フライト数が一定であれば対角項の和は一定であるため解は歪まないと考えられる。本研究では対角項を罰金の値のａ倍と仮定した。これがａ倍以上であれば、（－Ｃ）は正定値となる。ａの値について検討したところ、この値は罰金の値に依存しており、罰金が小さければａは大きくなければならないことがわかった。

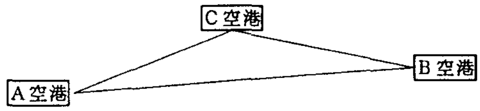
また、罰金の値の大小により実数解の値が変化してしまうという問題も生じる。本研究では得られた実数解を整数化するという性格上、最適解として選ばれるべき変数の実数解の値は１に近くなることが望ましい。図－１は最適解がわかっている問題（適用例で用いる例題）について、罰金の変化による変数の値の変化を示したものである。これによると、罰金が大きいときは変数間の値に差がみられなくなり、整数化する際の計算時間が増大すると考えられる。また、罰金が小さくなるにつれて最適解である”□”と”＋”で表される変数の値が増加する。しかし罰金を与えて制限してあるはずの”◇”で表される変数の値も増大し、運行スケジュールとして実現不可能な解となってしまう。適当な罰金の値の設定については未だ試行錯誤の状態である。



図－１．罰金の変化による変数の値の変化

５．適用例

図－２のような３空港間のネットワークを１機が航行し、各フライト案（直行便）を選択したときの運航利益が表－１のように仮定されているとする。”ＡＢ”はＡ空港からＢ空港に運航することを示し、”9:00”は出発時刻を表している。ただし乗継ぎ利用は”ＡＣ”と”ＣＢ”の組合せのみとする。



図－２．３空港間のネットワーク

表－１．直行便の運航利益

	ＡＡ	ＡＢ	ＡＣ	ＢＡ	ＢＢ	ＢＣ	ＣＡ	ＣＢ	ＣＣ
9:00	0	20	30	-30	0	-20	5	10	0
11:00	0	15	10	5	0	10	-30	20	0
13:00	0	-20	-25	-40	0	-30	-50	5	0
15:00	0	30	50	40	0	20	35	40	0

この例題を本モデルにより計算したところ、表－２のように実数解を得た（罰金の値は-16、 対角項はその 2.5倍とした）。これを分枝限定法により整数化すると表－２の網掛け部の変数が１となり、最適解を得ることができた。

表－２．実数解

	ＡＡ	ＡＢ	ＡＣ	ＢＡ	ＢＢ	ＢＣ	ＣＡ	ＣＢ	ＣＣ
9:00	0	0.27	0.73	0	0	0	0	0	0
11:00	0	0.07	0.15	0	0	0.13	0	0.56	0.09
13:00	0.10	0	0	0	0.32	0	0	0.36	0.22
15:00	0	0	0.21	0.45	0	0	0.26	0.09	0

（　　部は整数化によって得られた最適解を表わす）

６．おわりに

本研究では、航空機材のスケジューリング問題を２次計画法の適用により定式化し、最適な運航スケジュールを求めることが可能なモデルを作成した。この２次計画モデルによって、線形の目的関数では考慮できなかった乗継ぎ旅客の取り扱いが可能となった。

しかし、罰金の値や対角項の値の設定を一意に行う事が出来ないという問題がある。今後は罰金，対角項と解との関係を明らかにし、それらの値の設定法を確立する事が必要である。

参考文献

１）Philip Wolfe : The Simplex Method for Quadratic Programing, Econometrica, Vol.27, 3, 1959