Ⅳ-301　四辺形調整
シュライバー法の例示

八戸工業大学　正会員　岩淵清行

１．まえがき

方向観測法で測角した時の,よく知られた所謂四辺形三角測量を,観測方程式をたてて調整するにあたり,コファクターを使わないで行なう時に,シュライバー法[1)]の初心者の為の納得のいく例示ができる。簡単の為に平面測量に限る。

２．準備（与件と求件）

記号番号は図１のごとし。すなわち　四辺形1,2,3,4において点1と点2は既知点、点3と点4は未知点(求点)である。既知座標値は点1(X1＝0,Y1＝0)，点2(X2＝1000，Y2＝0)とする。未知点の近似座標値は点3(X3=934.62，Y3=584.12)，点4(X4=508.72，Y4=573.12)とする。(長さの単位はメートル)　未知点の座標の最確値は順に（X3+△X3，Y3+△Y3)，(X4+△X4，Y4+△Y4)と表わす。この最確値を求める事が当面の問題である。測線方向の観測値Hiは次の如く与えられている。（角の単位は,別に断わるまで度分秒とする。）

点1で	H1 =0.0000，	H2 =16.2523，	H3 = 48.2540
点2で	H4 =0.0000，	H5 =49.2502，	H6 = 83.3634
点3で	H7 =0.0000，	H8 =64.2253，	H9 = 94.5746
点4で	H10=0.0000，	H11=50.5120，	H12=133.0035

特にH1,H4,H7,H10の方向は基準方向あるいは零方向といわれる。一般に方向Hiの最確値はHi+△Hiと書く。これらの方向の方向角の最確値は未知数Z1+△Z1，Z2+△Z2 ,Z3+△Z3，Z4+△Z4を導入して順に

Z1+△Z1+H1+△H1	Z1+△Z1+H2+△H2	Z1+△Z1+H3+△H3
Z2+△Z2+H4+△H4	Z2+△Z2+H5+△H5	Z2+△Z2+H6+△H6
Z3+△Z3+H7+△H7	Z3+△Z3+H8+△H8	Z3+△Z3+H9+△H9
Z4+△Z4+H10+△H10	Z4+△Z4+H11+△H11	Z4+△Z4+H12+△H12

と書く。ここに現われた未知数Zk+△Zk(k=1,2,3,4)は方向を方向角に変換するための角の値である。 未知数をこのZk+△Zkのように二つにわけて計算するテクニックは電卓のなかったガウスの時代のなごりであろう。(仮の原点の方法)[2)]　Zkは後でも述べるが電卓があれば任意の常数で可。方向 Hi の観測精度はすべて等しいと仮定する。(T.Vincenty)[3)]

３．原初観測方程式

以下方程式の中では角の単位はすべてラジアンとする。原初観測方程式はI=1,2,...,12として　Z(k)+△Z(k)+H(I)+△H(I)=HC(I)+a(I)△X3+b(I)△Y3+c(I)△X4+d(I)△Y4

ここに12個の方程式が出てきたが不定方程式である。従って最小二乗法の為の残差方程式はこの式から　△H(I)=A0(I,1)△Z1 + A0(I,2)△Z2 + A0(I,3)△Z3 + A0(I,4)△Z4 +A0(I,5)△X3 + A0(I,6)△Y3 + A0(I,7)△X4 + A0(I,8)△Y4 + F0(I).....(1)

とかかれる。ここに△Z1ないし△Z4の係数は-1か0である。△X3ないし△Y4の係数は方向角の近似座標からの逆算式のテーラー展開の一次の係数である。またF0(I)≡HC(I)-H(I)-Z(k)　でここに HC(I)は近似座標からの逆算方向角である　。Z(k)は先にはなんでも可といったが各測点における零方向の近似座標からの逆算方向角すなわちHC(k)を採用するのが常のようである。Z(k)=0としても結果の答えはまったく同じである。 この事はこの未知数を二つにわける必要がない事の検証である。この未知数Zk+△Zkは　orientation unknown(標定未知数)[4)]とよばれる。△Zkの方を標定誤差と言う人が多い。しかしこれはできるだけ小さいのが良いというあの観測誤差ではない。さて(1)なる残差式の二乗和最小から得られる正規方程式は八元連立一次方程式でそれは視察によって簡単に△Zkを消去して四元連立一次方程式におとせる事がわかる。その時シュライバー法における重さ-1/n

（今の場合は-1/3）がよくわかる。それをシステマテックにするのが以下である。

４．標定誤差 を消去した観測方程式（シュライバー法）

まず上記(1)式にあらわれている諸量を次の如くに書き換える。(I=1,2,...,12)

ΔV(I)≡ΔH(I)，A(I,1)≡A0(I,5)，A(I,2)≡A0(I,6)，A(I,3)≡A0(I,7)，

A(I,4)≡A0(I,8)，F(I)≡F0(I)

ここにでてきた 新たな記号を使って 次の(2)式をつくる。(I=1,2,...,12)

ΔV(I) = A(I,1)ΔX3 + A(I,2)ΔY3 + A(I,3)ΔX4 + A(I,4)ΔY4 + F(I)....(2)

つぎにI=13,14,15,16において(2)式とおなじ形のものをつくる。ただしL=1,2,3,4として

A(13,L)≡ A(1,L) +A(2,L) +A(3,L) : F(13)≡ F(1) +F(2) +F(3)

A(14,L)≡ A(4,L) +A(5,L) +A(6,L) : F(14)≡ F(4) +F(5) +F(6)

A(15,L)≡ A(7,L) +A(8,L) +A(9,L) : F(15)≡ F(7) +F(8) +F(9)

A(16,L)≡ A(10,L)+A(11,L)+A(12,L) : F(16)≡ F(10)+F(11)+F(12) .....(3)

かくして16個の式(2)の形の観測方程式(残差方程式)が出来上がるが その重さは I=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12において1，I=13,14,15,16において-1/3であるとする。

５．解の公式

未知数 ΔX3,ΔY3,ΔX4,ΔY4の行列を[X]として正規方程式は [N][X] + [B] = 0 となる。この方程式は先に述べた四元連立一次方程式と厳密に同じである。ここに

$[N]\equiv[A]^T[P][A]$，$[B]\equiv[A]^T[P][F]$ そして[A]は16個の式(2)の形の観測方程式の係数行列であり，[F]はおなじく16個の観測方程式のF値からの行列，[P]は対角行列で1行から12行目までが1,残りが-1/3である。答は $[X]=-[N]^{-1}[B]$ で求められる。

もしΔZk(k=1,2,3,4)を知りたいなら既述八元連立一次方程式にΔX3,ΔY3,ΔX4,ΔY4を代入してすぐに得られる。またΔH(I) は式(1)に戻って求めることになる。[5)]

６．数値計算例

先に示した数値を用いて計算すると ΔX3=-0.05161,ΔY3=0.06613，ΔX4=0.01952,ΔY4=0.00314 従って座標最確値は X3+ΔX3=934.5683，Y3+ΔY3=584.1861 X4+ΔX4=508.7395，Y4+ΔY4=573.5431となる。最確値の推定誤差は省略。

７．参考文献

１）森 忠次著 測量学 2 応用編 丸善 P.29
２）E．クライツィグ原著 数理統計学 培風館 P.27
３）H．F. Rainsford Survey adjustments and Least Squares P.178
４）測量協会 現代測量学 第四巻 P.388
５）測量協会 測量学事典 P.191 Schribers Law

図 1